
I- Quelques conseils pour bien démarrer l'année

Pour les grandes vacances, je vous conseille de reprendre le travail avant la rentrée. Il ne faut pas travailler toutes les vacances loin de là. Mais il faut remettre la machine en route 10 à 15 jours avant la rentrée. L'année de spé démarre le **2 septembre**, il faut être prêt!!!!

Pour cela voilà un devoir en temps libre à rendre le vendredi 3 septembre et aussi quelques consignes de révisions :

- Nous commencerons l'année par de l'algèbre linéaire, donc vos révisions sont à faire parmi les exercices proposés et plus si affinité (revoir votre cours, bien sûr!!!)
- Ensuite en ce qui concerne l'analyse, je ne peux vous donner que quelques conseils de base :
 - CONNAITRE PAR COEUR VOS FORMULES DE TRIGO et VOS DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS, ainsi que leurs applications classiques (montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité)!
 - Connaître les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité!
 - Connaître les théorèmes classiques (Thm de Rolle, Thm des valeurs intermédiaires, Thm de la bijection, Inégalité des accroissements finis), connaître un théorème c'est connaître le résultat AVEC LES HYPOTHESES!!
 - Connaître les primitives usuels, le théorème d'intégration par parties et le théorème de changement de variable dans une intégrale.

Tout ce qui sera acquis ne sera plus à apprendre pour le concours!!!

II- Révisions de trigonométrie et nombres complexes

Exercice 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner les formules suivantes : $\cos(a + b) = \dots$, $\sin(a + b) = \dots$, $\tan(a + b) = \dots$, $\cos(a) \cos(b) = \dots$, $\sin(a) \sin(b) = \dots$, $\sin(a) \cos(b) = \dots$

Exercice 2

Résoudre $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer et déterminer que

1. il existe $(P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\sin(2n\theta) = \cos(\theta)P_n(\sin(\theta))$ et $\cos(2n\theta) = Q_n(\sin(\theta))$
2. il existe $(R_n, S_n) \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\sin((2n + 1)\theta) = R_n(\sin(\theta))$ et $\cos((2n + 1)\theta) = S_n(\cos(\theta))$

On pourra remarquer que $e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$ et utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(a + kb)$, $\sum_{k=0}^n \sin(a + kb)$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z + 1)^n = -(z - 1)^n$ sur \mathbb{C} .

III - Exercices de révisions autour de l'algèbre et l'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P(X) \mapsto P'(X) + XP(1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer le rang de f et une base de $\text{Im } f$.
4. Déterminer la dimension de $\ker f$ et une base de $\ker f$.

Exercice 2 :

Dans \mathbb{R}^3 , on se donne les sev suivants :

$$H = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad K = \text{Vect} (U = (1, 1, 2)).$$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que H et K sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
3. On cherche à déterminer les expressions analytiques de la projection et de la symétrie par rapport à H parallèlement à K .
 - (a) Déterminer pour tout vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sa décomposition dans $H \oplus K$: c'est à dire déterminer $X_H \in H$ et $X_K \in K$ tel que $X = X_H + X_K$.
 - (b) On rappelle que la projection sur H parallèlement à K est l'application $X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X_H$ et la symétrie par rapport à H parallèlement à K est l'application $X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X_H - X_K$.
En déduire les expressions analytiques de la projection et de la symétrie par rapport à H parallèlement à K .
4. Donner les matrices de ces deux endomorphismes de \mathbb{R}^3 , respectivement notées P et S , dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Que peut-on dire de P^2 et S^2 ?

Exercice 3 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On note $E = \mathbb{R}^n$, (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par A .

1. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de son image.
2. Déterminer la dimension de $\ker f$ ainsi qu'une base de cet espace.

Exercice 4 :

Enoncer le théorème de la division euclidienne.

Soit $n \geq 3$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par

1. $P(X) = (X - 1)(X - 2)$.
2. $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$.