Recommandations pour l'entrée en Math Sup
Classe Préparatoire PCSI du Lycée Militaire d'Aix-en-Provence
Mathématiques — Sylvain Damour

1 Consignes

Dès l'entrée en Math Sup, vous serez certainement surpris par le rythme de travail très rapide, ainsi que par la grande quantité de théorèmes et de formules que l'on vous demandera de comprendre et **d'apprendre par cœur**.

Vous augmenterez vos chances de réussite en révisant le programme de Terminale S, quelques semaines avant la rentrée. Vous trouverez ci-dessous une liste des points importants dont vous aurez besoin dès la rentée.

2 Thèmes mathématiques à réviser

- Limites de suites et de fonctions.
- Langage de la continuité et tableau de variations.
- Dérivation.
- Fonctions exponentielle et logarithme.
- Nombres complexes, formulaire de trigonométrie.
- Produit scalaire, droites et plans dans l'espace.
- Combinatoire : factorielle $n!$, combinaisons $\binom{n}{k}$, formule du binôme.

3 Formulaire

Le formulaire ci-joint était distribué lors de l'épreuve de mathématiques du bac S en 2003. Il vous permettra d'avoir un aperçu général des connaissance requises. Il est conseillé de le connaître par cœur pour la rentrée.

ATTENTION : les parties
- **« *III. Probabilités* » (sauf le « *C. Combinaisons et formule du binôme* »),**
- **« *Enseignement de spécialité* »,**

ne sont pas à connaître.

4 Devoir en temps libre n° 1

Les exercices suivants devront être rédigés et rendus le jour de la rentrée.

On prendra soin de numéroter les questions, d'encadrer ou de souligner très proprement les résultats, de laisser des marges à gauche de chaque page et en haut de la première page, de prévoir un en-tête comprenant, au minimum, les nom et prénom, la date, la classe, et le titre du devoir.

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :
$A = \dfrac{\left(a^5\right)^2 \left(b^{-3}\right)^{-1} c^4}{a^3 b^{-2} \left(c^2\right)^{-3}}, \quad B = \dfrac{\left(3x^2+2\right)^2 - \left(2x^2+1\right)^2}{x^2+1}, \quad C = \dfrac{x^3 - y^3}{(x-y)^2}, \quad D = 2^{\frac{3}{5}} \times 4^{-\frac{1}{10}} \times \sqrt[5]{8}.$

Exercice 2. Développer $\left(1+\sqrt{3}\right)^4$, grâce à la formule du binôme.

Exercice 3. Résoudre les équations $\cos x = 0$ et $\cos x = 1$.

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite de $f(x) = x^2 - x + 1$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 5. Calculer la dérivée de $f(x) = (\cos 2x)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

Exercice 6. Simplifier les expressions $A = \mathrm{e}^{2 \ln x}$ et $B = \ln(x\,y) + \ln \dfrac{x}{y}$.

Exercice 7. Faire l'étude et tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 8. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation de la droite D passant par le point $A\,(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1,-1)$.

Exercice 9. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer l'équation du plan P passant par le point $A\,(1,1,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}\,(1,2,2)$.

5 Bibliographie

Passerelle pour l'enseignement supérieur scientifique, de Pierre Grécias et Jean-Claude Martin, Éditions TEC & DOC, Lavoisier.

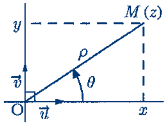
Ce livre peut être intéressant comme support de révisions durant les vacances d'été. Il reprend l'ensemble des notions à connaître pour l'entrée en Math Sup, en Mathématiques, Physique et Chimie. Il fait le bilan des programmes de seconde, première S et terminale S. Chaque chapitre comprend un résumé de cours et des exercices classiques corrigés.

BACCALAURÉAT, SÉRIE S
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE ET ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. NOMBRES COMPLEXES, GÉOMÉTRIE

A. NOMBRES COMPLEXES

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z.



z a pour forme algébrique $x + i\,y$.

Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = y$

Conjugué de z : $\overline{z} = x - i\,y$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $z \neq 0$,

z a pour forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

z a pour forme exponentielle : $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$

Module de z : $|\,z\,| = \rho$

Argument de z : $\arg z = \theta \;\; [2\pi]$

Conjugué de z : $\overline{z} = \rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$

Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\,\overline{z}\,| = |\,z\,|$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|\,z\,|}$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|\,z\,z'\,| = |\,z\,|\;|\,z'\,|$

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \;\; [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \;\; [2\pi]$

Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe t, $t \in \mathbb{C}$: $z' = z + t$

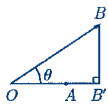
Homothétie de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation de centre Ω d'affixe ω, $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$

B. GÉOMÉTRIE

Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB'}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\theta$



Produit scalaire et coordonnées

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal de l'espace alors $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées (a, b, c) et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

II. ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a\,b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a\,b + b^2)$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \ldots + b^n$$

B. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

Soient a, b et c trois nombres réels $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

L'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles

  $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \qquad z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$
- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle $z_1 = -\dfrac{b}{2\,a}$
- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

  $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \qquad z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$

Si $\Delta \neq 0$, $\quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$, $\quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)^2$

C. TRIGONOMÉTRIE

Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

III. PROBABILITÉS

A. GÉNÉRALITÉS

Si les événements A et B sont incompatibles alors

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\qquad P(\Omega) = 1$ $\qquad P(\emptyset) = 0$

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Dans le cas de l'équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$$

Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

Cas où A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω

alors $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$

B. VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance mathématique : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (\mathrm{E}(X))^2$

Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

C. COMBINAISONS ET FORMULE DU BINÔME

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ $\qquad 0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$$

D. LOIS DE PROBABILITÉ

Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités

$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

$\mathrm{E}(X) = p$ $\qquad \mathrm{V}(X) = p(1-p)$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0\,;1]$

X peut prendre les valeurs entières $0, 1, \ldots, n$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathrm{E}(X) = np$ $\qquad \mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Loi uniforme sur $[0\,;1]$

J étant un intervalle inclus dans $[0\,;1]$,

$P(J) =$ longueur de J

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$, dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement

Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a, b]) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t$

Pour tout $c \geqslant 0$, $P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t$

IV. ANALYSE

A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$

$u_n = u_0 + n\, a$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b\, u_n$

$u_n = u_0\, b^n$

Somme de termes

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Limite d'une suite géométrique

Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$.

Si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$.

B. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS USUELLES

1. *Fonctions exponentielles et logarithmes*

$e^0 = 1$

Pour tous réels a et b,

$e^{a+b} = e^a\, e^b$ $\qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $\qquad (e^a)^b = e^{a\,b}$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

$\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$\ln a\, b = \ln a + \ln b$ et $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$a^x = e^{x \ln a}$ $\qquad \ln(a^x) = x \ln a$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]0\,;+\infty[$,

$y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$.

2. *Racine $n^{ème}$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x \in [0\,;+\infty[$ et $y \in [0\,;+\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

C. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n\, e^{-x} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

D. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

1. *Dérivées et primitives des fonctions usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. *Opérations sur les dérivées*

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (k\,u)' = k\,u'$ k étant une constante

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ $\qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$ $\qquad (v \circ u)' = (v' \circ u)\,u'$

$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u\,u'$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

E. CALCUL INTÉGRAL

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

Formules fondamentales

Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

$\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Si $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $g'(x) = f(x)$.

Formule de Chasles

$\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$

Linéarité

$\displaystyle\int_a^b (\alpha\,f(t) + \beta\,g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ordre

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Inégalité de la moyenne

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$

alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$

Intégration par parties

$\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$

La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ $(a \neq b)$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

F. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. CONGRUENCES

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$,

si $a \equiv b\ \ [n]$ et $a' \equiv b'\ \ [n]$, alors

$a + a' \equiv b + b'\ \ [n]$ $\qquad a - a' \equiv b - b'\ \ [n]$

$a\,a' \equiv b\,b'\ \ [n]$ $\qquad a^p \equiv b^p\ \ [n]$

B. CARACTÉRISATION COMPLEXE DES SIMILITUDES

– Similitude directe : $z' = a\,z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

– Similitude indirecte : $z' = a\,\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$

C. ENSEMBLES DE POINTS

Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une équation du cylindre d'axe $(\mathrm{O}; \vec{k})$ et de rayon $r > 0$ est $x^2 + y^2 = r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $(\mathrm{O}; \vec{k})$ est $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\theta$.