

# Rappel sur les Polynômes

$\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

### 1.1 Définition d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$

#### Définition 1.1

Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ . On appelle support de  $a$  l'ensemble (éventuellement vide) des indices  $k$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $a_k \neq 0$ .  
On note  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  l'ensemble des suites de  $\mathbb{K}$  à support fini.

#### ► Remarques :

- La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à support fini si et seulement si il existe un entier  $n$  tel que  $\forall k > n, a_k = 0$ .
- On peut alors noter  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ .

#### Définition 1.2

Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux éléments de  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1. La suite définie par  $a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à support fini.

2. La suite définie par  $\lambda \cdot a = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à support fini.

3. La suite définie par  $ab = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  est à support fini.

#### Proposition 1.3

$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +, \times)$  est un anneau commutatif.

$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel.

#### Définition 1.4

On appelle polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ .

On note en particulier  $X$  le polynôme  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ , appelé indéterminé du polynôme. Avec cette notation, on a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, X^n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$  avec le 1 situé en  $(n+1)^{\text{ième}}$  position et en particulier  $X^0 = (1, 0, 0, \dots)$ .

Tout polynôme  $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'écrit alors  $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  et on dit que les  $a_n$  sont les coefficients de  $A$ .

► **Remarques :**

– Dans l'écriture  $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  la somme est **finie**. En effet si on note  $N$  tel que  $\forall n > N, a_n = 0$

$$\text{alors } A = \sum_{n=0}^N a_n X^n.$$

–  $X$  est une indéterminée, c'est à dire une notation pour un objet et non une variable ou une inconnue d'une équation.

Par contre on peut substituer à  $X$  un élément d'un anneau : par exemple  $\lambda \in \mathbb{K}$  (on obtient l'application polynômiale), un endomorphisme, une matrice....

**Définition 1.5**

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Les lois sur  $\mathbb{K}[X]$  sont donc définies ainsi :  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux éléments de  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ .

1. Produit d'un polynôme par un scalaire :  $\lambda \cdot \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) X^n.$

2. Somme de deux polynômes :  $\sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n.$

3. Produit de deux polynômes :  $\left( \sum_{n \geq 0} a_n X^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n X^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n.$

**Proposition 1.6**

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$  est une algèbre commutative.

► **Remarques**

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  et  $n$  un entier.

Grâce à la structure d'anneau commutatif, on peut appliquer **la formule du binôme de Newton** :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

et toutes les autres identités remarquables comme la formule de factorisation

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \times \left( \sum_{k=0}^n A^k B^{n-k} \right).$$

## 1.2 Degré

### Définition 1.7

Soit  $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  un polynôme non nul de  $\mathbb{K}[X]$ . On appelle **degré de A** et on note  $\deg(A)$  le plus grand entier naturel  $N$  tel que  $a_N \neq 0$ . Par construction, on pose  $\deg(0) = -\infty$ . Si  $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  on dit que  $a_N X^N$  est le monôme de degré  $N$ , et  $a_N$  est le **coefficient dominant de A**. On dit que  $A$  est unitaire si  $a_N = 1$ . On note  $\mathbb{K}_N[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$ .

### Proposition 1.8

Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathbb{K}[X]$ . On a alors

1.  $\deg(A+B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$ , avec égalité si  $\deg(A) \neq \deg(B)$ .
2.  $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$ .

### Corollaire 1.9

$\mathbb{K}[X]$  est un anneau intègre :  $\forall A, B \in \mathbb{K}[X]$ , si  $AB = 0$  alors  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

### Définition 1.10

Soit  $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  un élément de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $N$ . On appelle fonction polynomiale associée à  $A$  l'application  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \sum_{k=0}^N a_k x^k$ .

► **Remarque** : En pratique, la notation avec  $X$  désigne le polynôme et celle avec  $x$  l'application polynomiale.

## 1.3 Polynôme dérivé

### Définition 1.11

Soit  $A = \sum_{n=0}^N a_n X^n$  un élément de  $\mathbb{K}[X]$ . On appelle polynôme dérivé de  $A$  le polynôme noté  $A'$  défini par  $A' = \sum_{n=1}^N n a_n X^{n-1}$  si  $A \neq 0$  sinon  $A' = 0$ .

► **Remarque** : Ceci est une définition formelle de la dérivation d'un polynôme d'indéterminé  $X$ .

### Définition 1.12

Soit  $A = \sum_{n=0}^N a_n X^n$  un élément de  $\mathbb{K}[X]$ . On définit les polynômes dérivés successifs de  $A$  en posant  $A^{(0)} = 1$  et  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $A^{(m+1)} = (A^{(m)})'$ .  
On dit que  $A^{(m)}$  est le polynôme dérivé  $m^{\text{ième}}$  de  $A$ .

### Théorème 1.13 (Formule de Taylor)

Soit  $A$  dans  $\mathbb{K}_N[X]$  et  $a$  dans  $\mathbb{K}$  alors

$$A = \sum_{k=0}^N \frac{A^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

## 1.4 Structure de $\mathbb{K}[X]$ et de $\mathbb{K}_N[X]$

On rappelle que  $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$  et  $(\mathbb{K}_N[X], +, \cdot)$  possèdent une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### Proposition 1.14

Une famille de polynômes de degré deux à deux distincts est libre dans  $\mathbb{K}[X]$ .

### Proposition 1.15

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie mais dont une base est  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . C'est à dire tout polynôme s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de cette famille.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ .  $(\mathbb{K}_N[X], +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $N + 1$  dont une base est  $(X^n)_{n \in [0, N]}$ .

► **Remarque** Soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{K}$ , alors la famille  $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^N)$  est une base de  $\mathbb{K}_N[X]$  où la décomposition de tout polynôme de  $\mathbb{K}_N[X]$  dans cette base est donnée par la formule de Taylor.

## 2 L'anneau euclidien $\mathbb{K}[X]$

### 2.1 Divisibilité

#### Définition 2.1

Soit  $D$  et  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . On dit que  $D$  **divise**  $A$  ou que  $A$  est un **multiple de**  $D$  dans  $\mathbb{K}[X]$  et on note  $D|A$ , lorsqu'il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = DQ$ .  
On note  $A\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des multiples de  $A$  et  $\mathcal{D}(A)$  l'ensemble de ses diviseurs.

#### ► Remarque :

Si  $D$  et  $A$  sont non nuls et  $D$  divise  $A$  alors  $\deg(D) \leq \deg(A)$ .

#### Proposition 2.2

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $A$  divise  $B$  et  $B$  divise  $A$ . Alors il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A = \lambda B$ .  
On dit  $A$  et  $B$  sont associés.

### 2.2 Division euclidienne

#### Théorème 2.3

Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{K}[X]$  et  $B$  non nul. Alors

$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(B)$ .  $Q$  est appelé le quotient et  $R$  le reste.

## 3 Racine d'un polynôme

### 3.1 Racine simple

#### Définition 3.1

Soit  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , on dit que l'élément  $\alpha$  de  $\mathbb{K}$  est une racine de  $A$  si  $A(\alpha) = 0$ .

► **Remarque :** L'écriture  $A(\alpha) = 0$  se lit en tant que  $A$  application polynomiale. On identifie polynôme et application polynomiale.

#### Proposition 3.2

Soit  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ . Le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $(X - \alpha)$  est  $A(\alpha)$ .

► **Exemple :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X-1)(X-2)$ .

### Proposition 3.3

Soit  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . *L'élément  $\alpha$  de  $\mathbb{K}$  est racine de  $A$  ssi  $(X - \alpha)$  divise  $A$ .*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   $n$  racines distinctes de  $A$  alors  $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$  divise  $A$ .

### Proposition 3.4

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $A$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$ .

*$A$  est le polynôme nul ssi  $A$  admet au moins  $n + 1$  racines distinctes.*

► Autrement dit, si on montre que  $A$  est de degré au plus  $n$  et possède  $n + 1$  racines distinctes alors  $A$  est le polynôme nul.

## 3.2 Multiplicité d'une racine

### Définition 3.5

Soit  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$  non nul et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ . On dit  $\alpha$  est racine de  $A$  (d'ordre) de multiplicité  $\mu \geq 1$  lorsque  $(X - \alpha)^\mu$  divise  $A$  et  $(X - \alpha)^{\mu+1}$  ne divise pas  $A$ .

### Proposition 3.6

Soit  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$  non nul et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\alpha$  est racine de multiplicité  $\mu$  de  $A$ .
2.  $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = Q(X - \alpha)^\mu$  et  $Q(\alpha) \neq 0$ .
3.  $A(\alpha) = 0, A'(\alpha) = 0, \dots, A^{(\mu-1)}(\alpha) = 0$  et  $A^{(\mu)}(\alpha) \neq 0$ .

► **Exemple**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$ .

### 3.3 Propriétés autour des racines

**Définition 3.7**

Soit  $A = \sum_{n=0}^n a_n X^n$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tel que  $a_N \neq 0$ .

On dit que  $A$  est **scindé sur  $\mathbb{K}$**  s'il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  (pas nécessairement distincts) tels que  $A = a_n \prod_{k=1}^N (X - \alpha_k)$ .

On dit que  $A$  est **scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$**  s'il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  **deux à deux distincts** et  $a_N \neq 0$  tel que  $A = a_n \prod_{k=1}^N (X - \alpha_k)$ .

► **Remarque**

Soit  $A = \sum_{k=0}^N a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  avec  $a_N \neq 0$ .

$A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  ssi il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$  (racines de  $A$  deux à deux distinctes) et  $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$  (les ordres de multiplicité respectives des racines) tel que  $A = a_N \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k}$  et  $\sum_{k=1}^p \mu_k = N$ .

► **Exemple**

Ecrire le polynôme  $A$  de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 6 tel que 1 est racine de multiplicité 2, 3 est racine de multiplicité 1, 4 est racine de multiplicité 3 et de coefficient dominant 5.

### Théorème 3.8 (Théorème de d'Alembert Gauss)

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

### Proposition 3.9

Si  $A \in \mathbb{R}[X]$  et si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une racine de  $A$  d'ordre  $\mu \geq 1$  alors  $\bar{\alpha}$  est racine de  $A$  de même ordre de multiplicité.

#### ► Remarque

- Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , cette proposition ne dit rien car  $\bar{\alpha} = \alpha$ .
- Si  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  alors  $(X - \alpha)^\mu (X - \bar{\alpha})^\mu$  divise  $A$  soit  $(X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2)^\mu$  divise  $A$ .
- Cette propriété sera très importante dans le chapitre de la réduction.

## 3.4 Relation coefficients et racines

### Proposition 3.10

Soit  $A = \sum_{n=0}^N a_n X^n$  dans  $\mathbb{K}[X]$  avec  $a_N \neq 0$ . On suppose qu'il est scindé sur  $\mathbb{K}$  c'est à dire

il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^N$  (non nécessairement distincts) tels que  $A = a_n \prod_{k=1}^N (X - \alpha_k)$ .

Alors en particulier

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = -\frac{a_{N-1}}{a_N} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^N \alpha_k = (-1)^N \frac{a_0}{a_N}.$$