

Algèbre linéaire I (Révisions)

1 Matrices

Dans tout ce qui suit, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} .

1.1 Définitions

Définition 1.1

Pour tous entiers positifs n et p , on appelle **matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K}** un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Les a_{ij} s'appellent les **coefficients de la matrice**. Le premier indice est celui de la ligne et le second celui de la colonne.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, on parle alors de matrice **carrées**.

Proposition 1.2

L'espace $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est \mathbb{K} espace vectoriel.

L'espace $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif, non intègre.

► Matrices nilpotentes :

Définition 1.3

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'ordre q si $A^{q-1} \neq 0$ et $A^q = 0$.

Définition 1.4

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$

- on définit les puissances de la matrice A de la façon suivante :

$$A^0 = Id_n, A^k = A \cdot A^{k-1} \text{ pour tout entier } k \geq 1.$$

- Soit P un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} , $P(X) = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$, on définit la matrice

$$P(A) = \sum_{k=0}^p \alpha_k A^k.$$

On parle de polynômes de matrices.

1.2 Matrice inversible et matrice transposée

Définition 1.5

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Si B existe, elle est unique et on note $B = A^{-1}$ et A^{-1} est appelé l'inverse de A .

► Une des deux relations $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ suffit pour montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.

On notera $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$.

Définition 1.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit

1. le **noyau** $\ker(A)$ de A comme l'ensemble des $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $AX = 0$.
2. l'**image** $\text{Im}(A)$ de A comme l'ensemble des $Y \in \mathbb{K}^n$ tels que il existe $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $AX = Y$.

Proposition 1.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence des propriétés suivantes

$$A \text{ est inversible} \iff \ker(A) = \{0\} \iff \text{Im}(A) = \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.8

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

Définition 1.9

On appelle **transposée d'une matrice** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ que l'on note ${}^tA = (\alpha_{ij})$ définie par $\alpha_{ij} = a_{ji}$.

Proposition 1.10

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(A+B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors ${}^t(AB) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Définition 1.11

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On dit que A et B sont **équivalentes** ssi il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = QAP^{-1}$.

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que M et N sont **semblables** ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $M = PNP^{-1}$.

1.3 Matrices échelonnées ou pivot de Gauss

Définition 1.12

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est **échelonnée** si

1. Chaque ligne de A ne comporte que des zéros ou a son premier coefficient non nul égal à 1.
2. Si une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont.
3. Si la ligne i a son premier coefficient non nul sur la colonne j , alors le premier coefficient non nul de la ligne $i + 1$ se trouve sur une colonne $k > j$.

Proposition 1.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ échelonnée, alors A est triangulaire supérieure et A est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont identiquement égaux à 1.

Théorème 1.14 (Echelonnement d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. il existe une matrice P produit de matrices élémentaires telle que la matrice PA est échelonnée.

1.4 Résolution des systèmes linéaires

Proposition 1.15

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $X \in \mathbb{K}^p$ est solution du système linéaire $AX = b$ si et seulement si $X \in \mathbb{K}^p$ est solution du système linéaire $PAX = Pb$.

Les systèmes linéaires que l'on sait résoudre à la main sont les systèmes associés à une matrice A triangulaire. La proposition précédente 1.15 et l'algorithme de l'échelonnement nous assurent qu'on peut toujours se ramener à la résolution d'un système triangulaire.

► Déterminer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$

Déterminer A^{-1} consiste à résoudre n systèmes linéaires $AX_j = E_j$ avec E_j le vecteur de coordonnées $(E_j)_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$. Les colonnes de la matrice A^{-1} ne sont rien d'autre que les vecteurs X_j .

2 Introduction aux espaces vectoriels

Soit \mathbb{K} un corps, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

2.1 Définition d'un espace vectoriel

Définition 2.1

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} si

1. E est muni d'une loi de composition interne $+$ appelée **addition** à savoir une application de $E \times E \rightarrow E$ telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. E est muni d'une loi de composition externe \cdot appelée **multiplication**, à savoir une application de $E \times \mathbb{K} \rightarrow E$ ($\lambda \cdot x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$) telle que pour tous $x \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
 - (a) Il existe un élément appelé **élément neutre** pour la multiplication $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tel que $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \cdot 1_{\mathbb{K}} = x$.
 - (b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
 - (c) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
 - (d) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

2.2 Familles libres, liées, génératrices, bases

Définition 2.2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une famille **finie** d'éléments de E . On dit que la famille (e_1, \dots, e_n) est **libre**, si pour toute famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = 0_E \implies \forall i \in [1, n], \alpha_i = 0.$$

2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E de cardinal quelconque. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est **libre** si toutes ses sous-familles finies sont libres.
3. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **liée** si elle n'est pas libre.
4. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **génératrice** si pour tout $x \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Au triment dit, si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

5. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une **base** si elle libre et génératrice.

► **Remarque :**

- Une combinaison linéaire de vecteurs de E ne fait intervenir qu'un nombre **fini** de vecteurs !
- **Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.**

Proposition 2.3

Soient E un \mathbb{K} -es et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $x \in E$, il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ appelé les **coordonnées de x dans la base \mathcal{B}** tel que : $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$.

Définition 2.4 (Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)

Soit (f_1, \dots, f_k) k éléments d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On appelle **espace vectoriel engendré par la famille $(f_i)_i$** le sous ensemble de E constitué des combinaisons linéaires des éléments f_i :

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in E, x = x_1 f_1 + \dots + x_k f_k = \sum_{i=1}^k x_i f_i \right\}$$

L'ensemble $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2.3 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 2.5 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si E possède une famille génératrice finie, toutes les bases ont même cardinal appelé **dimension** de l'espace vectoriel E .

Proposition 2.6

Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à n et le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à n .

Théorème 2.7

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et (e_1, \dots, e_n) une famille de n éléments de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
- (e_1, \dots, e_n) est une famille génératrice de E .
- (e_1, \dots, e_n) est une famille libre de E .

2.4 Représentation matricielle d'une famille de vecteurs et applications

2.4.1 Famille de vecteurs et matrices

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension $n \geq 1$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et (f_1, \dots, f_p) une famille de vecteurs de E . On peut associer à cette famille une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne sont les coordonnées du vecteur f_j dans la base \mathcal{B} .

Réciproquement, si on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut lui associer une famille de vecteurs (f_1, \dots, f_p) dont les coordonnées dans la base \mathcal{B} sont les vecteurs colonnes de la matrice A .

Proposition 2.8

La famille (f_1, \dots, f_p) est libre si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. La famille est génératrice si et seulement si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^p$

Définition 2.9 (Rang d'une famille de vecteurs)

*Soit (f_1, \dots, f_p) une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle **rang de la famille** $(f_i)_i$, la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.*

Définition 2.10 (Rang d'une matrice)

*Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de la matrice** A la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes. On le note $\text{rang}(A)$. C'est aussi la dimension de $\text{Im}(A)$.*

Proposition 2.11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors le rang des matrices A , PA et AQ sont égaux : $\text{rang}(A) = \text{rang}(PA) = \text{rang}(AQ)$.

Le rang est invariant par isomorphisme.

Corollaire 2.12

Soit \mathcal{B} une base de E . Le rang de la famille (f_1, \dots, f_p) est égal au rang de la matrice des coordonnées des vecteurs f_i dans la base \mathcal{B} .

En particulier, pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs il suffit de déterminer le rang de la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans n'importe quelle base. Ca ne dépend pas de la base choisie.

Proposition 2.13

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est égal au rang de ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$. Le rang de A est aussi égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes de A .

► Pour déterminer le rang d'une matrice, on lui applique le pivot de Gauss qui sont des opérations qui ne changent pas le rang et on lit le rang sur la matrice échelonnée.

2.5 Sous espace vectoriel

Définition 2.14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un **sous espace vectoriel** de E si $0_E \in F$ et pour tous $x, y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $x + y \in F$ et $\lambda \cdot x \in F$.

Proposition 2.15

Soit E un \mathbb{K} -ev.

$F \subset E$ est un sous espace vectoriel de E ssi $0_E \in F$ et $\forall x, y \in F, \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda \cdot y \in F$.

► Remarques :

- Soit (e_1, \dots, e_k) un famille d'éléments d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. L'espace engendré par les (e_i) , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un sous espace vectoriel de E .
- Un sous espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On peut donc parler de dimension d'un sous espace vectoriel.
- Si F est un sous espace vectoriel de E \mathbb{K} -ev de dimension n , alors

$$\dim F \leq n, \text{ de plus } \dim(F) = n \Leftrightarrow E = F.$$

Définition 2.16

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

- Les sous espaces vectoriels de dimension 1 sont appelés des **droites**.
- Les sous espaces vectoriels de dimension 2 sont appelés des **plans**.
- Les sous espaces vectoriels de dimension $n - 1$ sont appelés des **hyperplans**.

2.5.1 Bases et théorème de la base incomplète

Proposition 2.17

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et (f_1, \dots, f_n) une famille de vecteurs de E . La famille $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne sont les coordonnées du vecteur f_j dans la base \mathcal{B} est inversible. Cette matrice est alors appelée **la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'**

Proposition 2.18

- Soit (f_1, \dots, f_p) une famille **libre** d'un espace vectoriel de dimension n , alors $p \leq n$.

Si $p = n$, (f_1, \dots, f_p) est une base de E .

- Soit (g_1, \dots, g_q) une famille **génératrice** de E espace vectoriel de dimension n , alors $q \geq n$.

Si $q = n$, (g_1, \dots, g_q) est une base de E .

Théorème 2.19 (Théorème de la base incomplète)

Soit p un entier positif, (f_1, \dots, f_p) une famille **libre** d'un espace vectoriel de dimension n . Soit (g_1, \dots, g_q) une famille génératrice de E .

Alors il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E tq $e_i = f_i$ pour tout $i \leq p$ et $e_i \in \{g_1, \dots, g_q\}$ pour tout $i > p$.

2.6 Sous espaces vectoriels remarquables

Proposition 2.20

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , alors $H = F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E .

Définition et Proposition 2.21

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On note

$$H = F + G = \{x \in E \text{ tels que } x = y + z \text{ avec } y \in F, z \in G\}.$$

L'espace H est un sous espace vectoriel de E appelé **somme de F et G** .

Proposition 2.22

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Si (f_1, \dots, f_n) est une famille génératrice de F et (g_1, \dots, g_p) est une famille génératrice de G alors la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une famille génératrice de $H = F + G$.

Définition 2.23 (Somme directe)

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On dit que F et G sont en **somme directe** si $F \cap G = \{O_E\}$.

Définition 2.24 (Sous espaces supplémentaires)

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si $E = F + G$ et si F et G sont en somme directe. On note $E = F \oplus G$.

Proposition 2.25

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

$$F \oplus G = E \iff \forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G.$$

Théorème 2.26 (Caractérisation de supplémentaires en dimension finie)

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de **dimension finie**. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$.
2. $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
3. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition 2.27

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E .

Alors il existe un sous espace vectoriel G de E tel que F et G soient supplémentaires.

Proposition 2.28

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

3 Applications linéaires sur un \mathbb{K} -espace vectoriel

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3.1

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On dit qu'une application $u : E \rightarrow F$ est **linéaire** si

1. Pour tout $x, y \in E$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$.
2. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** de E .

► Une application $u : E \rightarrow F$ est **linéaire** ssi $\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}, u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$.

Proposition 3.2

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Définition 3.3

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit u une application linéaire de E sur F . On appelle

- **Noyau de u** l'ensemble noté $\text{Ker } u$ défini par

$$\text{Ker } u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_E\}.$$

- **Image de u** l'ensemble noté $\text{Im } u$ défini par

$$\text{Im } u = \{y \in F \text{ tel qu'il existe } x \in E \text{ tel que } y = u(x)\}.$$

Proposition 3.4

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit u une application linéaire de E sur F .

L'espace $\text{Ker } u$ est un sous espace vectoriel de E et l'espace $\text{Im } u$ est sous espace vectoriel de F .

Définition 3.5

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit u une application linéaire de E sur F . On appelle **rang de u** la dimension de l'espace vectoriel $\text{Im } (u)$ et on le note $\text{rang}(u)$.

Proposition 3.6

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit u une application linéaire de E sur F .

- L'application u est injective ssi $\text{Ker } u = \{0_E\}$.
- L'application u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F$.
- L'application u est **bijjective** si et seulement si $\text{Ker } u = \{0_E\}$ et $\text{Im } u = F$. On parle alors d' **isomorphisme**, et d' **automorphisme** si $F = E$.

Proposition 3.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
2. L'image par u d'une famille liée est une famille liée de F .
3. Si u est **injective**, l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F .

Proposition 3.8

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . On suppose que E est un espace vectoriel de dimension n et on considère (e_1, \dots, e_n) une base de E , alors pour tout $x \in E$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \text{ avec } x_1, \dots, x_n \text{ les coordonnées de } x.$$

Par conséquent, l'application linéaire f est entièrement déterminée par la donnée des $f(e_i)$.

Corollaire 3.9

Soient E et F deux \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Proposition 3.10

Soient E et F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de E .

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective ssi l'image de cette base \mathcal{B} de E est une base de F .

Corollaire 3.11

Soient E et F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

- Si u est un isomorphisme entre E et F alors $\dim E = \dim F$.
- Réciproquement si $\dim E = \dim F$, alors il existe un isomorphisme entre E et F .

3.2 Matrice d'une application linéaire

3.2.1 Définition

Définition 3.12

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension p et n . On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$** la matrice notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base \mathcal{B}' :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}), \text{ avec } f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \dots + a_{nj}\varepsilon_n.$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on notera $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

3.2.2 Propriétés

Proposition 3.13

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F et $\mathcal{B}'' = (\eta_1, \dots, \eta_q)$ une base de G . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(E, G)$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

1. $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$.
2. $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.
3. $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(h \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(h) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Corollaire 3.14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{B} une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ inversible, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}.$$

Réciproquement, si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible alors f est inversible.

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases de E , alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est égale à $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$.

3.2.3 Changement de bases

Théorème 3.15

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et $x \in E$, alors si X et X' désignent les coordonnées de x dans respectivement la base \mathcal{B} et la base \mathcal{B}' et si $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , alors

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$$

Théorème 3.16

Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors si $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' et $Q_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$ désigne la matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{C}' on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = Q_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = Q \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) P^{-1}.$$

Ainsi les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$ sont équivalentes.

Théorème 3.17

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r . Alors A est équivalente à la matrice suivante

$$J_{r,n,p} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

Corollaire 3.18

Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

► Deux matrices semblables ont même rang mais la réciproque est fausse !

Théorème 3.19

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(f) P^{-1}.$$

Ainsi les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables. Autrement dit, deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

3.2.4 Théorème du rang

Proposition 3.20

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F un \mathbb{K} -ev quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit G un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E , alors la restriction de f à G réalise un isomorphisme de G dans $\text{Im } f$.

Théorème 3.21 (Théorème du rang)

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F un \mathbb{K} -ev quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker } (f)) + \dim(\text{Im } (f)).$$

► Conséquence :

$$\text{Si } \dim(E) = \dim(F), f \text{ bijectif} \Leftrightarrow f \text{ injectif} \Leftrightarrow f \text{ surjectif}$$

3.3 Applications linéaires remarquables : formes linéaires, projecteurs

3.3.1 Homothéties

Définition 3.22

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme $f_{\lambda} \in \mathcal{L}(E)$ qui à tout $x \in E$ associe $f_{\lambda}(x) = \lambda x$.

3.3.2 Projecteur

Définition 3.23

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $p \circ p = p$.

Proposition 3.24

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur alors

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p : \forall x \in E, x = p(x) + x - p(x) \text{ avec } p(x) \in \text{Im } p \text{ et } x - p(x) \in \text{Ker } p.$$
$$x \in \text{Ker } p \text{ ssi } p(x) = 0 \text{ et } y \in \text{Im } p \text{ ssi } p(y) = y.$$

Autrement dit, un projecteur n'est rien d'autre qu'une projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$:

$$\forall x \in E, x = x_{\text{Im}} + x_{\text{Ker}}, \text{ avec } x_{\text{Im}} \in \text{Im } p, x_{\text{Ker}} \in \text{Ker } p \text{ et } p(x) = x_{\text{Im}}.$$

3.3.3 Symétrie

Définition 3.25

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $s \circ s = \text{Id}_E$.

Proposition 3.26

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie alors

- $$E = \text{Ker } (s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker } (s + \text{Id}_E) :$$
- $\forall x \in E, x = \frac{s(x) + x}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$ avec $\frac{s(x) + x}{2} \in \text{Ker } (s - \text{Id}_E)$ et $\frac{-s(x) + x}{2} \in \text{Ker } (s + \text{Id}_E)$.
 - On peut remarquer que $s = 2p - \text{Id}_E$ avec $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On dit que p est le projecteur associé à la symétrie s et réciproquement. On a

$$\ker(p) = \text{Ker } (s + \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad \text{Im } (p) = \text{Ker } (s - \text{Id}_E).$$