Algèbre linéaire II

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. E peut être de dimension infinie.

1 Sommes de sous-espaces vectoriels

1.1 Sommes de sev

Définition 1.1

*Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie de sev de E, on appelle **somme de** $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et on note $\sum_{i=1}^{p} E_i$ l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{p} x_i$ où les vecteurs x_i appartiennent à E_i.*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i,\ \forall i \in [|1,p|]\ x_i \in E_i \right\}.}$$

*La somme est **directe** ssi la décomposition $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ est unique.*

► **Notation :** La somme directe est notée $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Proposition 1.2

L'ensemble $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion des E_i :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_i E_i\right).}$$

Proposition 1.3

*La somme est **directe** ssi $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$,*

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Longleftrightarrow \forall i \in [|1,p|]\ x_i = 0_E\right)}.$$

1.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.4

Les sous-espaces $(E_i)_{i\in[|1,p|]}$ de E sont supplémentaires dans E si, et seulement si, leur somme est directe et égale à E, c'est à dire lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition 1.5

*Les sous-espaces $(E_i)_{i\in[|1,p|]}$ de E sont **supplémentaires** dans E si, et seulement si :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists!(x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \dots E_p \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i.}$$

Proposition 1.6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$ et $n = \deg(P) - 1$. Le sev $P\mathbb{K}[X]$ (formé des multiples de P) est le sev $\mathbb{K}_n[X]$ (formé des polynômes de degré $\leqslant n$) sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$. Autremant dit :

$$\boxed{P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}[X]}$$

Définition 1.7

On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit F un sev non nul de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est **adaptée** *à F ssi $\mathcal{B}$ est de la forme $(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_R)$ où $\mathcal{B}_F$ est une base de F.*

Proposition 1.8

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(E_i)_{i\in[|1,p|]}$ une famille finie de sev non nuls de E en somme directe.
Si pour tout $i \in [|1,p|]$ $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i, alors

$$\boxed{\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p) \text{ obtenue en concaténant les bases } \mathcal{B}_i \text{ des } E_i \text{ est une base de } \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$$

dite **adaptée à cette décomposition en somme directe**.

Théorème 1.9

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in[|1,p|]}$ une famille finie de sev de E.

*La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est **directe** si et seulement si* $\boxed{dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} dim E_i.}$

Démo : d'après ce qui précède.

1.3 Projecteurs

Définition 1.10

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel tel que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, on peut définir pour $j \in [|1,p|]$ les applications $p_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x_j \end{array}$. ***Ceux sont les projecteurs associés à la somme directe.***

Théorème 1.11

Les applications p_j pour $j \in [|1,p|]$ définis ci-dessus vérifient

$$\boxed{\begin{cases} -\forall j \in [|1,p|],\ p_j \in \mathcal{L}(E) \text{ et } p_j^2 = p_j. \\ -p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } i \neq j \\ -Id_E = \sum_{j=1}^{p} p_j. \end{cases}}$$

Réciproquement, si des applications p_i pour $i \in [|1,p|]$ vérifient ces trois propriétés, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ avec pour tout $i \in [|1,p|]$ $E_i = \mathrm{Im}\ p_i$.

2 Polynômes de Lagrange

Proposition 2.1

Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On étudie l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

u est linéaire surjective dont le noyau est l'ensemble des multiples du polynôme $N(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$.
De plus la retriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ définit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[x]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

Les antécédents de la base canonique sur $\mathbb{K}^{n+1}$ sont **les polynômes interpolateur de Lagrange** ils vérifient :

$$\boxed{\forall k \in [|0,n|], \quad L_k(X) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}}$$

associés à la famille de scalaires deux à deux distincts $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Ils vérifient :

- $\forall (i,k) \in [|0,n|]^2, \quad L_k(a_i) = \delta_i^k$,
- $\forall k \in [|0,n|], \quad \deg(L_k) = n$,
- $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n)$ n scalaires deux à deux distincts. Pour tout $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = \lambda_i$ pour $i = 0 \ldots n$. De plus P vérifie

$$\boxed{P(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X).}$$

▶ **Remarque :** On dit que P interpole les valeurs λ_j en les points a_j.

3 Dualité

Dans ce paragraphe E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

3.1 Généralités

Définition 3.1

*On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. E^* **est appelé le dual de** E.*

▶ **Exemples :**

1. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie, $n = \dim(E) \geqslant 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout x de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ unique tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application $e_i^* : E \to \mathbb{K}, x \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur E, appelée $i$ème coordonnée sur la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ alors l'application $\mu : E \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur E.

Théorème 3.2

E^* est un $\mathbb{K}$ e.v. : $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ev.

Théorème 3.3

*On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 1$. Les formes linéaires coordonnées constituent une base $\mathcal{B}^*$ de E^*, appelée **base duale** de $\mathcal{B}$. **La dimension de** E^* **est égale à** n.*

Proposition 3.4

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base duale. On a :

$$\boxed{\forall \varphi \in E^*,\, \varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* \qquad \forall x \in E,\, x = \sum_{k=1}^{n} e_i^*(x) e_i.}$$

▶ **Exemples :**

Définition 3.5

Pour toute base $\mathcal{F}$ de E^*, il existe une base unique $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} = \mathcal{B}^*$ est appelé la base préduale de $\mathcal{F}$ et on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases duales l'une de l'autre.

(Admis)

▶ **Remarque :** En pratique pour déterminer une base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ ou une base préduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 1, on utilise la caractérisation : $\boxed{\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\},\, \varphi_i(e_j) = \delta_i^j.}$

▶ **Exemple fondamental :** Soit $(a_0, \ldots, a_n)$ $(n+1)$ points de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
On note $(L_0, \ldots, L_n)$ la base de polynômes de Lagrange associée alors $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale avec $\forall i \in \{0, \ldots, n\},\, \varphi_i : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K},\, P \mapsto P(a_i)$; et réciproquement.

4 Hyperplan

Dans ce paragraphe E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Définition 4.1

On appelle ***hyperplan*** *de E tout sous-espace vectoriel qui admet* ***un supplémentaire de dimension 1.***

Proposition 4.2

Toute forme linéaire sur E non nulle est surjective.

Théorème 4.3 (Caractérisation d'un hyperplan)

$\boxed{\textit{H est un hyperplan de E ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.}}$

▶ **Exemples :**

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
2. $H = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 4.4

Soit f et g deux formes linéaires sur E non nulles. Alors

$$f \text{ et } g \text{ colinéaires } \iff Ker(f) = Ker(g)$$

Proposition 4.5

En dimension finie, pour x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et les a_i non tous nuls, les hyperplans sont caractérisés par une équation du type :

$$x \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

Théorème 4.6

Soit e un vecteur non nul de E, E de dimension finie, alors il existe une forme linéaire sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

▶ **Remarque :** Le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toute forme linéaire s'annule.

5 La trace

Définition 5.1

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *la* **trace** *de* A *est définie par :* $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.}$

Théorème 5.2

La trace est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 5.3

Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *on a* $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Corollaire 5.4

Deux matrices semblables ont même trace.

Définition 5.5

La trace d'un endomorphisme *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie est la trace d'une matrice représentative de cet endomorphisme dans une base arbitraire.*

Proposition 5.6

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tA)$.

Proposition 5.7

Si E *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel de dimension finie et si* p *est un projecteur de* E *alors* $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.