

Exercice I

Déterminer le rang des matrices suivantes et une base du noyau dans les trois premiers cas (vous justifierez soigneusement vos réponses) :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. M_a = \begin{pmatrix} -3a & 1 - 4a & -1 + 4a \\ -3a & -2 - a & 2 + a \\ -3a & -2 - a & 2 + a \end{pmatrix}. \text{ On distinguera les cas } a = 0, a = 1 \text{ et } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Exercice II

Dans \mathbb{R}^3 , on se donne les sev suivants :

$$H = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad K = \text{Vect} (U = (1, 1, 0)).$$

1. Déterminer $\dim H$ et en donner une base.
2. Démontrer que H et K sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
3. On cherche à déterminer les expressions analytiques de la projection et de la symétrie par rapport à H parallèlement à K .
 - (a) Déterminer pour tout vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sa décomposition dans $H \oplus K$: c'est à dire déterminer $X_H \in H$ et $X_K \in K$ tel que $X = X_H + X_K$.
 - (b) On rappelle que la projection sur H parallèlement à K est l'application $X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X_H$ et la symétrie par rapport à H parallèlement à K est l'application $X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X_H - X_K$.
En déduire les expressions analytiques de la projection et de la symétrie par rapport à H parallèlement à K .
4. Donner les matrices de ces deux endomorphismes de \mathbb{R}^3 , respectivement notées P et S , dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Que peut-on dire de P^2 et S^2 ?

Problème

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante $M := \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et on note m son endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé. On note id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^3 et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Partie I : Etude de m

1. Déterminer le rang et une base de l'image de m .
2. Déterminer $\text{Ker}(m)$, $\text{Ker}(m - id)$ et $\text{Ker}(m - 4id)$. Montrer que ces sev sont des droites vectorielles et déterminer un vecteur qui les engendre, que l'on notera respectivement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.
3. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice de m dans cette base. Dans la suite on la notera D .
4. Quel est le lien entre D et M ?
5. Déterminer les puissances de M .

Partie II : Endomorphismes que commutent avec m

On pose $C(m) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / f \circ m = m \circ f\}$.

1. Démontrer que $C(m)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Démontrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.
3. En déduire $\dim C(m)$.
4. Exhiber une base de $C(m)$.
5. Démontrer que $C(m) = \{P(m) / P \in \mathbb{R}_2[X]\}$.

Partie III : Etude de l'équation $X^2 = M$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. On suppose qu'il existe N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $N^2 = M$ et on pose $\Delta = P^{-1}NP$.
 - (a) Que vaut Δ^2 ?
 - (b) Démontrer que Δ commute avec D .
 - (c) En déduire les valeurs possibles de Δ ?
3. Quel est le nombre de solutions à l'équation $X^2 = M$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? (On ne demande pas le calcul explicite des solutions).