A rendre le lundi 3 octobre

Problème

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes. Le candidat pourra aborder le partie B en admettant le résultat de la question $A.3.b$.
Soit n un entier naturel non nul. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. On note respectivement I_n et O_n la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det(A)$, sa trace $\mathrm{Tr}(A)$ et son polynôme caractéristique est définie par $P_A(X) = \det(A - XI_n)$. On admettra que $P_A(X)$ est un polynôme de degré n.

Partie A.

1. Soient A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :

$$\det\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(D),\ \det\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = 1 \text{ et } \det\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$$

b. En déduire $\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

c. De la question précédente, déduire $\det\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

2. Dans toute la suite de cette partie, A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que si la matrice D est inversible alors on a

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

3. (Seulement pour les 5/2) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \in S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

b. En déduire que l'on a $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B.

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection des ligne i et colonne j qui vaut 1).
Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$R_A\ :\ X \mapsto AX \quad \text{et} \quad L_A :\ X \mapsto XA$$

1. Déterminer les matrices de R_A et L_A dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $R_A - qL_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs par

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes

a. $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2 A - q(a+d)I_2)$,

b. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) \det \begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix}$,

c. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) \big((1+q)^2 \det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\big)$.

4. On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

a. Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.

b.(Seulement pour les 5/2) A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$
- on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

5. (Seulement pour les 5/2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.