

## Exercice I, E3A PC 2005

1. Soit  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  la matrice de  $u$  dans la base canonique  $\mathcal{C}$ . Si  $u$  est diagonalisable alors il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice diagonale telle que  $U = PDP^{-1}$ , alors  $U^2 = PD^2P^{-1}$  donc  $U^2$  qui est la matrice de  $u^2$  dans la base canonique  $\mathcal{C}$  est semblable à une matrice diagonale donc  $u^2$  est diagonalisable.

2. (a) Soit  $\alpha \neq 0$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(u - \alpha Id_E) \cap \text{Ker}(u + \alpha Id_E)$  alors  $u(x) = \alpha x = -\alpha x$  donc comme  $\alpha \neq 0$   $2\alpha x = 0$  entraîne  $x = 0$ . Donc  $\text{Ker}(u - \alpha Id_E) \cap \text{Ker}(u + \alpha Id_E) = \{0_E\}$  (\*)

Soit  $x \in \text{Ker}(u^2 - \alpha^2 Id_E)$ .

On pose, comme proposé,  $x = \frac{1}{2\alpha} [(u(x) + \alpha x) - (u(x) - \alpha x)]$  alors

$$\begin{aligned} u(u(x) + \alpha x) &= u^2(x) + \alpha u(x) \\ &= \alpha^2 x + \alpha u(x) \end{aligned}$$

car  $u^2(x) = \alpha^2 x$  et donc  $u(u(x) + \alpha x) = \alpha(u(x) + \alpha x)$  donc  $u(x) + \alpha x \in \text{Ker}(u - \alpha Id_E)$ .

De même, on a  $u(x) - \alpha x \in \text{Ker}(u + \alpha Id_E)$ .

Donc tout élément de  $\text{Ker}(u^2 - \alpha^2 Id_E)$  se décompose en la somme d'un élément de  $\text{Ker}(u - \alpha Id_E)$  et d'un élément de  $\text{Ker}(u + \alpha Id_E)$  (\*\*).

De (\*) et (\*\*), on en déduit que :  $\text{Ker}(u^2 - \alpha^2 Id_E) = \text{Ker}(u - \alpha Id_E) \oplus \text{Ker}(u + \alpha Id_E)$ .

(b) Soit  $\mu$  une valeur propre de  $u$ , alors il existe  $x \neq 0$ , tel que  $u(x) = \mu x$  alors  $u^2(x) = u(\mu x) = \mu(\mu x) = \mu^2 x$  donc comme  $x \neq 0$ ,  $\mu^2$  est valeur propre de  $u^2$ .

(c) Si on suppose  $u^2$  diagonalisable alors si on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $u^2$ , on a  $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u^2 - \lambda_i Id_E)$ .

Comme  $u$  est bijectif,  $u^2$  aussi et donc toutes les valeurs propres de  $u^2$  sont différentes de 0.

On pose alors pour tout  $\lambda_i = \alpha_i^2$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ .

Alors  $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(u^2)$  or d'après la question 2(a), on a  $\dim E_{\lambda_i}(u^2) = \dim E_{\alpha_i}(u) +$

$\dim E_{-\alpha_i}(u)$ . Donc  $\dim E = \sum_{i=1}^p (\dim E_{\alpha_i}(u) + \dim E_{-\alpha_i}(u))$  et l'ensemble des

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_p\}$  décrivent l'ensemble des valeurs propres possibles de  $u$ .

Donc  $\dim E$  est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $u$ . Donc  $u$  est diagonalisable.

3. (a) Le calcul donne :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Le rang de  $U$  est 3 (par exemple son déterminant vaut 6 donc la matrice est inversible).

(c) Le polynôme caractéristique de  $U^2$  est  $P(X) = -(X-1)(X-4)(X-9)$ , donc il est scindé à racines simples et  $U^2$  est diagonalisable. Les calculs donnent :

$$U^2 = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) D'après la question 2, comme  $U$  est inversible, on en déduit que  $U$  est diagonalisable.  
Les calculs donnent (même s'ils n'étaient pas demandés) :

$$U = P\Delta P^{-1}, \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice II, E3A PC 2007

1. (a) Le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X^2 + X = X(X - 1)^2$  est annulateur de  $u$  donc les valeurs propres réelles de  $u$  sont parmi les racines réelles de  $P$ , c'est à dire parmi 1 et 0.
- (b) De même, le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X^2 + X = X(X - 1)^2$  est annulateur de  $U$  donc les valeurs propres complexes de  $U$  sont parmi les racines complexes de  $P$ , c'est à dire parmi 1 et 0.
- Le polynôme caractéristique de  $U$  est de degré 3, de coefficient dominant  $-1$ , il peut donc prendre 4 valeurs possibles :
- i.  $\chi_U(X) = -X^3$
  - ii.  $\chi_U(X) = -X^2(X - 1)$
  - iii.  $\chi_U(X) = -X(X - 1)^2$
  - iv.  $\chi_U(X) = -(X - 1)^3$ .
- (c)  $u$  et  $U$  ont le même polynôme caractéristique. Donc les valeurs possibles sont les mêmes qu'à la question précédente.
- (d) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , d'après le théorème de la division euclidienne  $\exists!(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $X^k = Q(X)X(X - 1)^2 + R(X)$  (\*) avec  $\deg(R) < 3$ . On cherche donc  $R()$  sous la forme  $R(X) = aX^2 + bX + c$ .

Si on évalue l'égalité (\*) en 0 et 1, on obtient deux équations :

$$0 = c \quad \text{et} \quad 1 = a + b + c$$

Pour obtenir une troisième équation, il faut dériver l'égalité (\*)

$kX^{k-1} = Q'(X)X(X - 1)^2 + Q(X)((X - 1)^2 + 2X(X - 1)) + R'(X)$  et en évaluant cette nouvelle égalité en 1, on obtient :

$$k = 2a + b$$

Finalement, on obtient :

$$a = k - 1, \quad b = 2 - k, \quad c = 0.$$

On a donc  $X^k = Q(X)P(X) + (k - 1)X^2 + (2 - k)X$ . En utilisant le morphisme d'algèbre, cette égalité se traduit dans  $\mathcal{L}(E)$  pour  $u$  par  $u^k = Q(u) \circ P(u) + (k - 1)u^2 + (2 - k)u$ , or  $P(u) = 0$ , donc  $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = (k - 1)u^2 + (2 - k)u$ .

2. (a) Comme  $u$  est diagonalisable, il suffit de regarder les 4 valeurs possibles de son polynôme caractéristique pour trouver les 4 matrices diagonales auxquelles peut être semblable  $U$ .
- i. Si  $\chi_U(X) = -X^3$  alors  $D_0 = \text{Diag}(0, 0, 0)$  (qui est bien de rang 0) et  $U = 0$ .
  - ii. Si  $\chi_U(X) = -X^2(X - 1)$  alors  $D_1 = \text{Diag}(0, 0, 1)$  (qui est bien de rang 1).
  - iii. Si  $\chi_U(X) = -X(X - 1)^2$  alors  $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1)$  (qui est bien de rang 2).
  - iv. Si  $\chi_U(X) = -(X - 1)^3$  alors  $D_3 = \text{Diag}(1, 1, 1)$  et  $U = I_3$  (qui est bien de rang 3).
- (b) On voit bien que dans les 4 cas  $D_r^2 = D_r$  donc  $U^2 = U$  et  $u$  est un projecteur ; Comme  $v = Id_E - u$  c'est le projecteur associé à  $u$ .
- On a donc  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(v)$  et comme  $u$  et  $v$  sont associés  $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$  et  $\text{Im}(v) = \text{Ker}(u)$ .
- Donc  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v) = \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v) = E$ .

3. (a) La division euclidienne de  $(X - 1)^2$  par  $X$  donne  $(X - 1)^2 = X(X - 2) + 1$  donc  $(X - 1)^2 + X(2 - X) = 1$ , en posant  $B(X) = 2 - X$ , on a donc bien  $(X - 1)^2 + XB(X) = 1$ .
- (b) En utilisant cette égalité et le morphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , on obtient :  $(u - Id_E)^2 + (2Id_E - u) \circ u = Id_E$ . (\*)
- (c) Soit  $x \in \text{Ker}(v^2)$  alors  $(u - Id_E)^2(x) = 0$  donc en appliquant l'égalité précédente à  $x$  on obtient  $(2Id_E - u)(u(x)) = x$  soit  $2u(x) - u^2(x) = x$  soit encore  $u(2x - u(x)) = x$  donc  $x \in \text{Im } u$ . On a donc montré que  $\text{Ker}(v^2) \subset \text{Im}(u)$ .
- Soit  $y \in \text{Im}(u)$  alors il existe  $x \in E$ ,  $u(x) = y$ . On a alors  $(u - Id_E)^2(y) + 2u(y) - u^2(y) = y$ , en utilisant (\*) appliquer à  $y$  alors  $(u - Id_E)^2(y) = u^2(y) - 2u(y) + y = u^3(x) - 2u^2(x) + u(x) = 0$  par hypothèse sur  $u$ . Donc  $y \in \text{Ker}(v^2)$ . On a donc montré que  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v^2)$ .
- Conclusion :  $\text{Ker}(v^2) = \text{Im}(u)$ .
- Soit  $x \in \text{Ker}(u)$  alors en appliquant l'égalité (\*) à  $x$ , on a  $x = (u - Id_E)^2(x) = v^2(x)$  donc  $x \in \text{Im}(v^2)$ . On a donc  $\text{Ker}(u) \subset \text{Im}(v^2)$ .
- Soit  $y \in \text{Im}(v^2)$ . Alors il existe  $x \in E$ ,  $v^2(x) = y$ . Alors en appliquant l'égalité (\*) à  $x$ ,  $x = v^2(x) + 2u(x) - u^2(x)$  soit  $y = x - 2u(x) + u^2(x)$  alors  $u(y) = u(x) - 2u^2(x) + u^3(x) = 0$  par hypothèse sur  $u$ . Donc  $y \in \text{Ker}(u)$ . On a donc  $\text{Im}(v^2) \subset \text{Ker}(u)$ .
- Conclusion :  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v^2)$ .
- (d) Soit  $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}((u - Id_E)^2)$  alors  $u(x) = 0$  et  $u^2(x) - 2u(x) + x = 0$  donc  $x = 0$ . Ainsi  $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}((u - Id_E)^2) = \{0_E\}$  (\*\*).
- De plus  $\text{Ker}((u - Id_E)^2) = \text{Ker}(v^2) = \text{Im}(u)$  donc d'après le théorème du rang appliqué à  $u$   $\dim \text{Ker}((u - Id_E)^2) + \dim \text{Ker}(u) = \dim E$  (\*\*\*) .
- De (\*\*) et (\*\*\*) , on en déduit que  $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}((u - Id_E)^2)$ .
4. (a) D'après la relation de Grassman,  $\dim(F) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(v)) - \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) = 2 - \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v))$ .
- Or soit  $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$  alors  $u(x) = 0$  et  $v(x) = 0$  c'est à dire  $u(x) = x$  donc  $x = 0$ ; Ainsi  $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0_E\}$  et  $\dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) = 0$ .
- Donc  $\dim F = 2$ .
- (b) Soit  $x \in \text{Ker}(v)$  alors  $v(x) = 0$  donc  $v^2(x) = 0$ . Ainsi  $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(v^2)$ .
- De plus d'après la question 3)d),  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v^2) = E$  et comme  $\text{Ker}(u)$  est de dimension 1,  $\dim(\text{Ker}(v^2)) = 2$ .
- (c) On considère  $(e_1)$  une base de  $\text{Ker}(u)$  et  $e_3$  un vecteur non nul de  $\text{Ker } v^2 \setminus \text{Ker } v$  ce qui est possible car  $\text{Ker } v \subset \text{Ker } v^2$  mais  $\text{Ker } v \neq \text{Ker } v^2$  d'après la question précédente. On pose alors  $e_2 = v(e_3) = u(e_3) - e_3$ . Alors  $e_2 \neq 0$  et  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$ . On a alors  $u(e_1) = 0$ ,  $u(e_3) = e_2 + e_3$  et comme  $e_3 \in \text{Ker } v^2$ ,  $e_2 \in \text{Ker } v$  c'est à dire  $u(e_2) = e_2$ . Ainsi la matrice de  $u$  dans cette base est bien de la forme voulue  $T$ .
5. (a) Dans le premier exemple, on appelle  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $U$ . On a  $\text{rg}(u) = 1$  donc  $\dim \text{Ker}(u) = 2$ , donc 0 est valeur d'ordre au moins 2 et la somme de ses valeurs propres est égale à la trace de  $u$  c'est à dire 1; On peut donc conclure que 1 est valeur propre d'ordre 1 et 0 est valeur propre d'ordre 2 et de multiplicité 2 donc  $u$  est diagonalisable et elle est semblable à  $D_1$ . Enfin,  $\chi_u(X) = -X^2(X - 1)$ .
- (b) Dans le deuxième exemple, on appelle  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $U$ . On a  $\text{rg}(u) = 2$  donc  $\dim \text{Ker}(u) = 1$ . De plus  $V = I_3 - U$  est aussi de rang 2, donc  $\dim \text{Ker}(v) = 1$ . On ne peut donc être que dans le cas de la quatrième question (car  $\text{Ker } u$  et  $\text{Ker } v$  ne peuvent pas être supplémentaires) donc  $U$  est semblable à  $T$  et son polynôme caractéristique est le même que celui de  $T$ , ce qui est immédiatement sans calcul,  $\chi_U(X) = -X(X - 1)^2$ .