

Exercice I

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme u de E tel que $u^3 - 2u^2 + u = 0$. On pose $v = Id_E - u$.

1. (a) Montrer que si le réel λ est valeur propre de u , alors $\lambda \in \{0, 1\}$.
 (b) Soit U la matrice de u dans la base \mathcal{C} . Montrer que si le complexe λ est valeur propre de U , alors $\lambda \in \{0, 1\}$.
 En déduire les valeurs possibles du polynôme caractéristique de U .
 (c) En déduire les quatre valeurs possibles du polynôme caractéristique de u .
 (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par le polynôme $A(X) = X(X-1)^2$. En déduire l'expression de u^k au moyen de k , u^2 , u et Id_E .
2. On suppose dans cette question seulement que u est diagonalisable.
 - (a) Déterminer quatre matrices diagonales : D_0, D_1, D_2 et D_3 telles que D_r soit de rang r et telle que U soit nécessairement semblable à l'une de ces quatre matrices.
 - (b) Montrer alors que u et v sont des projecteurs. Que valent alors les espaces $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(u) + \text{Im}(v)$?
3. (a) Grâce à la division euclidienne de $(X-1)^2$ par X , en déduire un polynôme B tel que :
 $(X-1)^2 + XB(X) = 1$.
 (b) Vérifier que : $(u - Id_E)^2 + (2Id_E - u) \circ u = Id_E$.
 (c) Justifier que : $\text{Ker}(v^2) = \text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v^2)$.
 (d) Montrer que : $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}((u - Id_E)^2)$.
4. On suppose dans cette question que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(v)$ sont tous les deux de dimension 1.
 - (a) Quelle est la dimension de $F = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$.
 - (b) Justifier que $\text{Ker}(v^2)$ contient $\text{Ker}(v)$, et est de dimension 2.
 - (c) Grâce à 3d), justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice de u soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (d) Déterminer dans les deux cas suivants, la valeur du polynôme caractéristique de U , et si U est semblable ou non à l'une des cinq matrices D_0, D_1, D_2, D_3, T .

i. Premier exemple : $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii. Deuxième exemple : $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace vectoriel complexe $E = \mathbb{C}^n$, muni de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E .

1. Montrer que si u est diagonalisable alors $u^2 = u \circ u$ est aussi diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que u est bijectif.

(a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, on a :

$$\text{Ker}(u^2 - \alpha^2 \text{Id}_E) = \text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \alpha \text{Id}_E).$$

On pourra écrire $x \in \text{Ker}(u^2 - \alpha^2 \text{Id}_E)$ sous la forme $x = \frac{1}{2\alpha} [(u(x) + \alpha x) - (u(x) - \alpha x)]$.

(b) Montrer que si μ est valeur propre de u , alors μ^2 est valeur propre de u^2 .

(c) Montrer que si u^2 est diagonalisable, alors E est somme directe de sous-espaces propres de u , en déduire que u est diagonalisable.

3. Soit

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^3$, de matrice U relativement à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de E .

(a) Calculer la matrice U^2 .

(b) Calculer le rang de u .

(c) Montrer que u^2 est diagonalisable et en donner les éléments propres.

(d) Etudier si u est diagonalisable.