

PROBLEME

CCP, PSI 2006

Partie I

I.1 a) $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. Notons $P_M = \det(xI_{n+1} - M)$ le polynôme caractéristique de M et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n+1})$ de matrice M dans la base canonique. P_M est de degré $n+1 \geq 1$, donc admet au moins une racine sur \mathbb{C} , donc M admet au moins une valeur propre λ .

b) Soit V_1 un vecteur propre associé à λ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe V_2, \dots, V_{n+1} tels que $B' = (V_1, V_2, \dots, V_{n+1})$ soit une base de \mathbb{C}^{n+1} . Soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base B' et $M' = \text{mat}_{B'}(u)$. On a : $u(V_1) = \lambda V_1$ donc

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda & m'_{1,2} & \cdots & m'_{1,n+1} \\ 0 & m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad \text{Notons } N = \begin{pmatrix} m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, N \in$$

$$M_n(\mathbb{C}) \text{ et } L = (m'_{1,2}, \dots, m'_{1,n+1}), L \in M_{1,n}(\mathbb{C}) : \boxed{M' = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}}$$

c) D'après l'hypothèse faite au début de la question, N est trigonalisable, donc :

$$\exists H \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } S = H^{-1}NH$$

soit triangulaire supérieure.

On a : $N = HSH^{-1}$ et $S \in T_n(\mathbb{C})$

d) On pose $R' = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H^{-1} \end{pmatrix}$: $R'R = I_{n+1}$, donc : $R \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$ et $R^{-1} = R'$

e) Soit $M'' = R^{-1}M'R$. Posons $P = QR$: $M'' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & LH \\ 0_{n,1} & S \end{pmatrix}$; S est triangulaire supérieure donc M'' aussi. En conclusion : M est trigonalisable.

I.2 Si $n = 1$: toute matrice $M \in M_1(\mathbb{C})$ est triangulaire, donc trigonalisable.

D'après 1), si toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, alors toute matrice $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ est trigonalisable. On peut conclure à l'aide du principe de récurrence que :

toute matrice carrée complexe est trigonalisable

I.3 a) $P_G(x) = \det(G - xI_3) = -(x-1)^3$; 1 est valeur propre d'ordre 3 et $G \neq I_3$ donc $\dim[\text{Ker}(G - I_3)] \neq 3$ et G n'est pas diagonalisable.

b) $\text{rg}(G - I_3) = 2$ donc $\dim[\text{Ker}(G - I_3)] = 1$, $\boxed{u = e_1 - e_3}$ engendre $\text{Ker}(G - I_3)$ et tout autre vecteur propre est de la forme αu donc de première composante $\alpha \neq 1$.

$\det(u, e_2, e_3) = 1$ donc $B' = (u, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{C}^3 .

c) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}GQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. $L = (1, 0)$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. 1 est

valeur propre double de N et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé. Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $S =$

$$H^{-1}NH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; LH = (1, 0) ; \boxed{P = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

I.4 Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique ; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes de la diagonale. Donc si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à $T \in T_n(\mathbb{C})$, alors les termes diagonaux de T sont les valeurs propres de A

I.5 a) Par hypothèse : $j < i \Rightarrow s_{i,j} = t_{i,j} = 0$.

$$\text{Soit } U = ST = (u_{i,j}) : u_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k} t_{k,j}.$$

- Si $i > j$ alors pour $k < i : s_{i,k} = 0$ et
- pour $k \geq i, k > j \Rightarrow t_{k,j} = 0$ donc $u_{i,j} = 0$.

Donc $ST \in T_n(\mathbb{C})$.

Enfin si $i = j$ seul $k = i$ donne un terme non nul : $u_{i,i} = s_{i,i} t_{i,i}$

b) On prend $S = T : T^2 \in T_n(\mathbb{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^2$. Par récurrence : si $T^p \in T_n(\mathbb{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^p$, on prend $S = T^p$ d'où $T^{p+1} \in T_n(\mathbb{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^{p+1}$.

I.6 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après 2), $\exists T \in T_n(\mathbb{C}), \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $T = P^{-1}AP$. D'après 4), les termes diagonaux $t_{1,1}, \dots, t_{n,n}$ de T sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A . D'après 5), les termes diagonaux de T^k sont $(\lambda_1)^k, \dots, (\lambda_n)^k$; d'après 4) et $T^k = P^{-1}A^kP$, ce sont les valeurs propres de A^k . Donc $\rho(A^k) = \max \left\{ \left| (\lambda_i)^k \right|, 1 \leq i \leq n \right\} = (\max \{ |\lambda_i|, 1 \leq i \leq n \})^k$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\rho(A^k) = [\rho(A)]^k}$$

- I.7** – $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \psi(A)$ existe et $\psi(A) \geq 0$
 – $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [[1, n]]^2, a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$
 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, |\lambda a_{i,j}| \leq |\lambda| \psi(A)$$

donc $\psi(\lambda A) \leq |\lambda| \psi(A)$ (*).

Supposons $\lambda \neq 0$, alors par ce qui précède on a

$$\psi(A) = \psi\left(\frac{1}{\lambda} \lambda A\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \psi(\lambda A)$$

soit

$$|\lambda| \psi(A) \leq \psi(\lambda A). \quad (**)$$

Cette inégalité est évidente si $\lambda = 0$, donc avec (*) et (**), on a

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \psi(\lambda A) = |\lambda| \psi(A)$$

– Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \psi(A) + \psi(B)$$

ceci est un majorant indépendant de i et j donc

$$\psi(A + B) \leq \psi(A) + \psi(B).$$

Donc $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \psi(A + B) \leq \psi(A) + \psi(B)$

$$\boxed{\psi \text{ est une norme sur } M_n(\mathbb{C})}$$

Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$ tq $\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, u_{i,j} = 1 : \psi(U) = 1, U^2 = nU$ donc $\psi(U^2) = n$ et si $n \geq 2$ l'inégalité : $\psi(U \times U) \leq \psi(U) \times \psi(U)$ n'est pas vérifiée, donc ψ n'est pas une norme matricielle

I.8 Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ψ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elles sont alors équivalentes puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Par définition :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tq } \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \alpha \psi(A) \leq N(A) \leq \beta \psi(A)$$

Alors

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), N(AB) \leq \beta \psi(AB) \leq \beta \psi(A) \psi(B) \leq \frac{\beta}{\alpha^2} N(A) N(B)$$

Ainsi, en posant $C = \frac{\beta}{\alpha^2}$, on a montré que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N(AB) \leq CN(A)N(B)$.

I.9 On pose : $\forall k, B_k = P^{-1}A_kP$ et $B = P^{-1}AP$.

Alors $\forall k, B_k - B = P^{-1}(A_k - A)P$

Soit ϕ une norme matricielle : $0 \leq N(B_k - B) \leq \phi(P^{-1})N(A_k - A)N(P)$ d'où : $\phi(A_k - A) \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \phi(B_k - B) \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$

Réciproque : si (B_k) CV vers B , alors (PB_kP^{-1}) CV vers PBP^{-1} d'où (A_k) CV vers A

I.10 a) $\forall k \in \mathbf{N}^*, T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$.

A_k de terme général $a_{i,j}^{(k)}$ CV vers A si et seulement si $\forall (i,j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2, a_{i,j}^{(k)} \rightarrow a_{i,j}$ qd $k \rightarrow +\infty$. Donc la suite (T^k) CV ssi les suites complexes (λ^k) et $(k\lambda^{k-1}\mu)$ CV ssi

$\boxed{[|\lambda| < 1 \text{ (la limite est alors } 0_2)] \text{ ou } [\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0 \text{ } (\forall k, T^k = I_2)]}$

b) $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$.

D'après 9) (A^k) CV ssi (D^k) CV. Les cas de CV sont : $\begin{cases} |\lambda_i| < 1 \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2 \text{ (limite } 0_2) \\ \lambda_i = 1 \text{ et } |\lambda_j| < 1 \text{ pour } i \neq j \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \end{cases}$

c) Si A n'est pas diagonalisable, nécessairement ses valeurs propres sont égales. D'après 2) elle est trigonalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\mu \neq 0$ (sinon A serait diagonalisable). Donc d'après a), la suite (T^k) CV ssi $|\lambda| < 1$ et d'après 9), (A^k) CV ssi (T^k) CV. Ici $\rho(A) = |\lambda|$. Donc (A^k) CV ssi $\rho(A) < 1$ et la limite est 0_2

d) D'après b), si A est diagonalisable : (A^k) CV vers 0_2 ssi $(|\lambda_1| < 1 \text{ et } |\lambda_2| < 1)$, ssi $\rho(A) < 1$.
En conclusion de b) et c) : $\boxed{(A^k) \text{ CV vers } 0_2 \text{ ssi } \rho(A) < 1}$

Partie II

II.1 a) Posons

$$Y = AX : \forall i, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

$$\forall j, |x_j| \leq N_\infty(X) \Rightarrow |y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) N_\infty(X) \leq M_A N_\infty(X)$$

donc $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$

b) \mathbb{C}^n est un EV de dim finie donc toute norme N sur \mathbb{C}^n est équivalente à la norme N_∞ : $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall X \in \mathbb{C}^n, \alpha N_\infty(X) \leq N(X) \leq \beta N_\infty(X)$

$N(AX) \leq \beta N_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \leq \beta M_A \frac{1}{\alpha} N(X) \leq C_A N(X)$ en posant $C_A = \frac{\beta}{\alpha} M_A$

c) $\forall X \neq 0, \frac{N(AX)}{N(X)} \leq C_A$. L'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathbb{C}^n - \{0\} \right\}$ est une partie non vide et majorée de \mathbf{R} donc admet une borne supérieure.

d) Cette borne sup est le plus petit majorant et C_A est un majorant donc $\tilde{N}(A) \leq C_A$. Dans le cas de la norme N_∞ , on peut prendre $C_A = M_A$ donc : $\boxed{\tilde{N}_\infty(A) \leq M_A}$.

e) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow GX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

On a : $N_\infty(X_0) = 1, N_\infty(GX_0) = 10$ d'où $\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10 \Rightarrow \tilde{N}_\infty(G) \geq 10$.

De plus $M_G = 10$ donc $\tilde{N}_\infty(G) \leq 10$.

Conclusion : $\boxed{\tilde{N}_\infty(G) = M_G = 10}$

II.2 $\forall j, |y_j| = 1 \Rightarrow N_\infty(Y) = 1$.

Soit $Z = AY$:

$$\forall i, |z_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq M_A$$

Si $a_{i_0 j} = 0$ alors $a_{i_0 j} y_j = 0 = |a_{i_0 j}|$, sinon $a_{i_0 j} y_j = |a_{i_0 j}|$ car $\forall u \in \mathbb{C}^*, u \frac{\bar{u}}{|u|} = |u|$.

Donc

$$z_{i_0} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A,$$

et $N_\infty(Z) = M_A \Rightarrow \frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} = M_A \Rightarrow \boxed{\tilde{N}_\infty(A) \geq M_A}$.

En utilisant 1)d) on peut conclure : $\boxed{\tilde{N}_\infty(A) = M_A}$

II.3 a) $\tilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0, N(AX) = 0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0, AX = 0 \Leftrightarrow \forall X, AX = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$

b)

$$\forall X \neq 0, \frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = \frac{|\lambda| N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$$

donc $\tilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$

c) Si $\lambda \neq 0$:

$$\tilde{N}(A) = \tilde{N}\left(\frac{1}{\lambda} \lambda A\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \tilde{N}(\lambda A) \Rightarrow |\lambda| \tilde{N}(A) \leq \tilde{N}(\lambda A)$$

d'où $|\lambda| \tilde{N}(A) = \tilde{N}(\lambda A)$

Si $\lambda = 0$ on a égalité car les 2 membres sont nuls.

d) $\forall X \neq 0$

$$N[(A+B)X] = N(AX + BX) \leq N(AX) + N(BX)$$

donc

$$\frac{N[(A+B)X]}{N(X)} \leq \frac{N(AX)}{N(X)} + \frac{N(BX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$$

donc $\tilde{N}(A+B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.

e) $\forall X \neq 0, \frac{N(AX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) \Rightarrow N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X)$ et si $X = 0$ les 2 membres sont nuls.

f) On déduit de a),c),d) que \tilde{N} est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. De plus : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \forall X \in \mathbb{C}^n, N(ABX) \leq \tilde{N}(A)N(BX) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)N(X)$ d'où : $\tilde{N}(AB) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)$

Conclusion : $\boxed{\tilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } M_n(\mathbb{C})}$ (ce qui en prouve l'existence)

II.4 a) Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $AX = \lambda X \Rightarrow \frac{N(AX)}{N(X)} = |\lambda|$ donc

$|\lambda| \leq \tilde{N}(A)$. En particulier pour λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Donc $\boxed{\rho(A) \leq \tilde{N}(A)}$

b) Si $A = I_n$: $\rho(A) = 1$ et $\forall X, AX = X$ donc $\tilde{N}(A) = 1$: on a égalité.

c) Si $A \neq 0_n$ alors $\tilde{N}(A) \neq 0$ d'après 3)a). Si de plus A est nilpotente, sa seule valeur propre est 0 donc $\rho(A) = 0$ et : $\rho(A) < \tilde{N}(A)$

II.5 Si (A^k) converge vers 0_n alors $\tilde{N}(A^k) \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$. $[\rho(A)]^k = \rho(A^k) \leq \tilde{N}(A^k)$ donc $[\rho(A)]^k \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$. D'où : $\boxed{\rho(A) < 1}$. (Réciproque admise)

II.6 a) De l'inégalité vue en 5) on déduit pour $k \in \mathbf{N}^*$: $\rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}}$

b) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in Sp(\alpha A)$ donc $\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$

c) On prend $\alpha = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon}$ ($\alpha > 0$) et on applique a) :

$$\rho(A_\varepsilon) = \alpha \rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$$

car $\varepsilon > 0$

D'après le résultat admis de 5), $(A_\varepsilon)^k$ CV vers 0 donc $\exists k_\varepsilon$ tq $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\tilde{N}((A_\varepsilon)^k) \leq 1$.

$$(A_\varepsilon)^k = \alpha^k A^k \Rightarrow \tilde{N}((A_\varepsilon)^k) = \alpha^k \tilde{N}(A^k).$$

$$\text{Donc } \alpha^k \tilde{N}(A^k) \leq 1 \Rightarrow \tilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k.$$

d) Ainsi

$$\forall k \geq k_\varepsilon, \rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon : \text{c'est la définition de : } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$