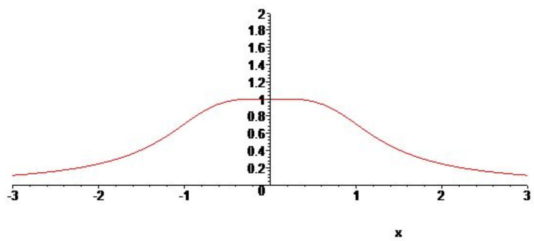
Extrait E3A PC 2011

PARTIE I

1. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$, paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite 0 en $+\infty$.



(b) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}$$

et

$$f''(x) = -6x^2(1+x^4)^{-3/2} - 2x^3 \times (-3/2) \times 4x^3(1+x^4)^{-5/2} = 6x^2(x^4-1)(1+x^4)^{-5/2}.$$

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = \pm 1$: il y a donc deux points d'inflexion de coordonnées $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$.

(c) D'après le cours, au voisinage de 0, on a

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{(-1/2)\times(-3/2)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2)$$

d'où l'on déduit en posant $t = x^4$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8).$$

(d) Puisque f est de classe C^∞, elle possède un DL à l'ordre 8 au voisinage de 0 donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{8} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^8).$$

Par unicité des coefficients d'un DL, on en déduit que $f^{(4)}(0) = -12$, $f^{(8)}(0) = 3 \times 7! = 15120$ et $f^{(k)}(0) = 0$ si k n'est pas multiple de 4.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$ donc la suite (a_n) est décroissante.

   (b) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \geqslant 0$.

   (c) Il suffit de remarquer que $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

PARTIE II

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$.

2. En faisant le chnagment de variable $u \mapsto \frac{\pi}{2} - u$ (avec $t = \frac{\pi}{2} - u$) on obtient

$$I_n = \int_{\pi/2}^{0} (\sin u)^n \times (-du) = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^n \, du.$$

3. Puisque $\cos t \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$ on a $I_n \geqslant 0$. De plus, $I_n = 0$ entrainerait que $\cos t = 0$ sur $[0, \pi/2]$ (cos est continue positive) ce qui est faux ; donc $I_n > 0$.

4. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\cos t - 1) dt \leqslant 0$ car $\cos t \leqslant 1$. La suite (I_n) est donc décroissante, minorée par 0, donc elle converge.

5. Intégrons par parties pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} (\cos t)(\cos t)^{n-1} dt \\
&= \left[(\sin t)(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin t) \times (-(n-1) \sin t)(\cos t)^{n-2} dt \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - (\cos t)^2)(\cos t)^{n-2} \, dt \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}$$

   On en déduit $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

6. $u_n = (n+1)I_{n+1} \times I_n = nI_{n-1}I_n = u_{n-1}$: la suite (u_n) est donc constante d'où $u_n = u_0 = I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

7. – $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ donc la suite $\dfrac{I_{2n}}{a_n}$ est constante et égale à sa valeur en 0 : $\frac{\pi}{2}$.

   – $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1}$ et $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n}$ d'où $\dfrac{(2n+1)I_{2n+1}a_n}{(2n-1)I_{2n-1}a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{2n-1}\dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2n-1}{2n} = 1$. La suite $(2n+1)I_{2n+1}a_n$ est donc constante et égale à sa valeur en 0 : 1.

8. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

9. $\dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$ a pour limite 1 donc par le théorème d'encadrement $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ aussi. $nI_n^2 = nI_nI_{n-1} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}}$ a donc pour limite $\dfrac{\pi}{2}$.

   On en déduit $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

10. (a) De $nI_n^2 \leqslant nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ on tire $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. On en déduit $a_n = \dfrac{2}{\pi} I_{2n} \leqslant \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Puis $a_n = \dfrac{1}{(2n+1)I_{2n+1}} \geqslant \dfrac{1}{2n+1}\sqrt{\dfrac{2(2n+1)}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$.

(b) $a_n = \dfrac{2}{\pi} I_{2n} \sim \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

(c) i) $a_n \sim \dfrac{C}{n^{1/2}}$ donc la série $\sum a_n$ diverge par la règle de Riemann.

ii) $\dfrac{a_n}{4n+1} \sim \dfrac{C'}{n^{3/2}}$ donc la série $\sum \dfrac{a_n}{4n+1}$ converge par la règle de Riemann.

iii) La série $\sum (-1)^n a_n$ est alternée car $a_n > 0$. De plus, la suite (a_n) est décroissante et a pour limite 0 donc la série alternée converge.

iv) La série $\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ est absolument convergente par le ii).

PARTIE III

1. (a) Toute fonction continue sur I admet une unique primitive qui s'annule en un point de I, d'où l'existence de F.
F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée f l'est aussi.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(-u) \times (-du)$ par le changement de variable affine $t = -u$.
Puisque f est paire, on a donc $F(-x) = -F(x)$: F est impaire.

(d) De $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, on déduit en intégrant sur $[1, x]$:

$$F(x) - F(1) \leqslant \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

(e) Toute fonction croissante et majorée sur $[A, +\infty[$ possède une limite en $+\infty$. Or F est croissante sur $[1, +\infty[$ et y est majorée par $F(1)+1$ donc elle possède une limite en $+\infty$, notée α.

2. (a) Puisque f est continue et possède un DL à l'ordre 8, on peut intégrer terme à terme ce DL pour obtenir le DL de F à l'ordre 9 :

$$F(x) = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^9)$$

(car de plus $F(0) = 0$).

(b) L'équation de la tangente en 0 est : $y = x$. Comme $F(x) - x \sim -\frac{1}{10}x^5$ quand x tend vers 0 on en déduit que pour $x > 0$ la courbe (C) est au dessous de T alors que pour $x < 0$ elle est au dessus de T.

3. (a) Le changement de variable $u \mapsto \frac{1}{u}$ $\mathcal{C}^1$ bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ ($t = \frac{1}{u}$) donne

$$F(x) - F(1) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt = \int_1^{1/x} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\sqrt{1+(1/u)^4}} = \int_{1/x}^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = F(1) - F(1/x).$$

(b) Puisque F est continue la limite en $+\infty$ de $F(1/x)$ est égale à $F(0) = 0$ donc la limite en $+\infty$ de $F(x)$ est égale à $2F(1)$.
On trouve ainsi $\alpha = 2F(1)$.

(c) Les droites d'équation $y = \alpha$ et $y = -\alpha$ sont asymptotes à (C).