A rendre le lundi 21 novembre

PROBLEME

Dans tout le problème :

– f désigne la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

– F désigne l'unique primitive de f qui s'annule en 0, donc $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n n!}$.

PARTIE I

1. Etude de f
   (a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative (C_f).
   (b) (C_f) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.
   (c) Donner le développement limite de f à l'ordre 8 en 0.
   (d) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \{1, \dots, 8\}$, en énonçant avec soin le ou les théorème(s) utilisé(s).
2. Etude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Etudier la monotonie de la nuite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

Partie II

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
4. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
6. Montrer que la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vous donnerez sa valeur.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)a_n}$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n-2}}{I_n}$.
9. En déduire un équivalent de I_n.
10. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.
    (b) En déduire un équivalent à a_n.

(c) Donner la nature des séries de termes général :

$$i)\, a_n \qquad ii)\, \frac{a_n}{n+1} \qquad iii)\, (-1)^n a_n \qquad iv)\, \frac{(-1)^n a_n}{n+1}$$

Partie III

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. : Etude globale de F.
   (a) Justifier l'existence de F et montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier la monotonie de F.
   (c) Montrer que F est impaire.
   (d) Montrer que $\forall x \geqslant 1,\ F(x) - F(1) \leqslant 1 - \frac{1}{x}$.
   (e) En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$, on la notera α.
2. Etude locale de F.
   (a) Donner le développement limité à l'ordre 9 en 0 de F.
   (b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abcisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisiange de 0.
3. Tracé de (C).
   (a) Montrer que $\forall x > 0,\ F(x) - F(1) = F(1) - F(\frac{1}{x})$.
   (b) En déduire la valeur de $F(1)$ en fonction de α.
   (c) Tracer (C) et T. Prendre $\alpha \approx 1,85$.