A rendre le lundi 28 novembre

PROBLEME

Soit α un réel **strictement positif.**

On note $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Partie I : Etude des modes de convergence de la série de fonctions.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$.

   En déduire que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
3. Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.
   Prouver que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
4. On suppose que $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

   (a) Justifier l'existence de $R_n(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

   (b) Etablir l'inégalité : $\forall x \in [0,+\infty[,\ R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}$.

   (c) En déduire que $\forall x \in [0,+\infty[,\ R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$.

   (d) Minorer alors $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   (e) Soit a est un réel strictement positif. En déduire $\displaystyle\sup_{x\in[0,a]} |R_n(x)|$ ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.

   (f) Que peut-on en déduire pour la série $\sum f_n$ sur $[0,a]$?

Partie II : Etude de la régularité de f.

1. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, f est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $\alpha > \dfrac{1}{2}$, f est continue sur $[0,+\infty[$.
3. Pour tout $\alpha > 0$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. **On suppose pour cette question** $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

   Soit g_x l'application définie sur $[1,+\infty[$ par $t \mapsto g_x(t) = \dfrac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$.

(a) Montrer que g_x est une fonction décroissante de t.

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \int_1^{n+1} g_x(t)\,dt$.

(c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n g_x(t)\,dt$ existe, on la note $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt$, et satisfait $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt \leqslant f(x)$.

(d) Calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,dt$.

on pourra faire le changement de variable $t = u^2$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,dt$.

(e) Déduire des questions précédentes que f n'est pas continue en 0.

5. Pour $\alpha > 0$ quelconque, montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
On pourra faire une étude sur $[a, b][$, $b > a > 0$.

6. **On suppose dans cette question $\alpha = 1$.**
On se propose de démontrer que $\displaystyle\frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

(a) Soit $A > 0$, justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant A$.

(b) Montrer qu'il existe $\eta > 0$, $\forall x \in]0, \eta[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \frac{A}{2}$.

(c) En déduire que $\forall x \in]0, \eta[$, $\displaystyle\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{A}{2}$.

(d) Conclure.

(e) f est-elle dérivable en 0 ?