

PROBLEME

Seules les parties I et II sont obligatoires.

Les parties III et IV nécessitent le chapitre 12 et le chapitre sur les équations différentielles : le chapitre 15.

Objet du problème :

Il s'agit de calculer par plusieurs méthodes les intégrales I_n définies dans la partie II.

Notations : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Partie I -

I.A - Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0$$

I.B - On note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

I.B.1) Justifier l'existence de J_n .

I.B.2) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3 .

I.B.3) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire une expression de J_n en fonction de n .

I.B.4) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$ et en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

I.B.5) Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

I.C -

I.C.1) Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.C.2) (Seulement les 5/2, il faut penser aux séries entières, les 3/2 vous admettraient le résultat de cette question pour la suite.)

Soit $a \in]0, \pi[$. Prouver que l'application f telle que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, a]$.

On pourra écrire : $f(x) = \frac{\frac{\sin(x)-x}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}}$, pour $x \in]0, a]$.

I.C.3) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt \right)$ lorsque $a \in]0, \pi[$.

I.C.4) En déduire la valeur de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt$ lorsque $a = \frac{\pi}{2}$, $a < \frac{\pi}{2}$ et $a > \frac{\pi}{2}$.

- I.D** - En utilisant les résultats précédents et l'intégrale $\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$, montrer que la fonction $F : X \mapsto \int_0^X \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet $\frac{\pi}{2}$ pour limite lorsque X tend vers $+\infty$. On posera $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.
- I.E** - En utilisant $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$, montrer que l'application $\left[t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \right]$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Partie II -

- II.A** - Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'application $\left[t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n \right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$\text{On pose : } I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt.$$

- II.B** - Montrer que : $I_1 = I_2$ (I_1 a été définie en **I.D**).
- II.C** - (Seulement les 5/2) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- II.D** - Montrer que : $I_n > 0$ pour $n \geq 1$. (On pourra utiliser une partition judicieuse de l'intervalle d'intégration).

Partie III -

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on considère les applications :

$g_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (\sin(t))^n$

et $h_{n,k} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_{n,k}(t) = \frac{1}{t^{n-k}} g_n^{(k)}(t)$, où $g_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de g_n .

- III.A** - Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, $h_{n,k}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- III.B** - Montrer que, pour $n \geq 2$ et $k \in \{0, \dots, n-2\}$, la valeur de l'expression $(n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$ ne dépend pas de k .
- III.C** - Pour $n \geq 2$, prouver que la fonction $G : X \mapsto \int_0^X h_{n,k}(t) dt$ admet en $+\infty$ une limite finie, notée $\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$ et que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t) dt = (n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$$

- III.D** - En déduire, pour $n \geq 2$: $I_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} g_n^{(n-1)}(t) dt$.

III.E -

III.E.1) Établir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$ les résultats suivants :

$$4^p (\sin t)^{2p} = C_{2p}^p + 2 \sum_{k=1}^p (-1)^k C_{2p}^{p-k} \cos(2kt) \quad (1)$$

$$4^p (\sin t)^{2p+1} = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} \sin((2k+1)t) \quad (2)$$

- III.E.2)** En déduire, en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$, une expression de I_n du type $q_n \pi$ où q_n est une somme de nombres rationnels (on pourra faire intervenir I_1 dans les calculs). Retrouver la valeur de I_2 , puis calculer I_3 et I_4 .

Partie IV -

IV.A - Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel positif, l'existence de l'intégrale :

$$A_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin(tx))^n}{t^n(1+t^2)} dt$$

IV.B - Montrer que l'application $[x \mapsto A_n(x)]$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ et qu'elle vérifie, pour tout $n \geq 2$, l'équation différentielle : $(E_n) : y'' - n^2y = n(n-1)A_{n-2}(x) - n^2x^{n-1}I_n$.

IV.C -

IV.C.1) Résoudre l'équation (E_2) .

IV.C.2) En déduire une expression de A_2 à l'aide de I_2 (on considérera les valeurs de $A_2(0)$ et $A_2'(0)$).

IV.C.3) Montrer que $A_2(x) = O(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$ et retrouver ainsi la valeur de I_2 .

IV.D - Exprimer A_1' à l'aide de A_2'' et en déduire une expression de A_1 .

IV.E - En procédant de manière analogue à **IV.C**, obtenir A_3 et I_3 .

IV.F - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n peut se mettre sous la forme : $A_n(x) = Q_n(e^{-x}) + R_n(x)$, où Q_n et R_n sont des fonctions polynômes vérifiant :

- * le degré de R_n est égal à $n-1$;
- * le degré de Q_n est égal à n ;
- * R_n a même parité que $n-1$;
- * Q_n a même parité que n .