Problème, CCP MP 2011

Partie I

1. (a) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, il suffit donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
   E contient clairement la fonction nulle donc $E \neq \emptyset$.
   Si $(f,g,\lambda) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x>0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto \big(f(t)+\lambda g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f+\lambda g \in E$. Donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}$.

   (b) $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et si $f \in F$, on a $\forall x>0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad |f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f \in E$ et donc $F \subset E$.
   $\boxed{\text{Donc } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

   (c) Par linéarité de l'intégrale sur $L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, pour tout $(f,g,\lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \mathcal{L}(f+\lambda g)(x) &= \int_0^{+\infty} \big(f(t)+\lambda g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \lambda\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}(f)(x) + \lambda\mathcal{L}(g)(x)\end{aligned}$$

   soit $\mathcal{L}(f+\lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda\mathcal{L}(g)$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathcal{L} \text{ est une application linéaire de } E \text{ à valeurs dans } F(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}).}$

2. (a) $\mathcal{U} \in F$ donc $\mathcal{U} \in E$ et on peut définri sa tranformée de Laplace.

$$\forall x>0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}$$

   soit $\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \dfrac{1}{x}}$.

   (b) De même, $h_\lambda \in F$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \big|h_\lambda(t)\big| \leqslant 1$ donc $\underline{h_\lambda \in E}$.

$$\forall x>0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(\mathcal{U})(x+\lambda)$$

   donc $\boxed{\forall x>0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $\dfrac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} = t^n\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists A>0,\ \forall t \geqslant A,\ \dfrac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} \leqslant 1$.
   $\boxed{\text{Ainsi } \exists\, A>0,\ \forall t \geqslant A,\ t^n\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}.}$
   $g_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $\forall x>0,\ g_n(t)\mathrm{e}^{-xt} = f(t)t^n\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}\right)$ et $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi. Donc $\boxed{g_n \in E\ .}$

4. Déjà, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
   Puisque f est croissante, on a $f' \geqslant 0$ donc $\forall x>0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t)\mathrm{e}^{-xt} \geqslant 0$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$ pour avoir $f' \in E$. Or, par intégration par parties,

$$\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\mathrm{e}^{-xt}\Big]_0^y + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = f(y)\mathrm{e}^{-xy} - f(0) + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Or $f \in E$ implique, $\forall x > 0,\ \int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}(f)(x)$.

D'autre part, f étant bornée $\forall x > 0,\ \forall y \geqslant 0\, |f(y)\mathrm{e}^{-xy}| \leqslant \left\|f\right\|_\infty \mathrm{e}^{-xy} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La limite du membre de droite existe donc quand y tend vers $+\infty$ ce qui donne

$\boxed{f' \in E \text{ et } \forall x > 0,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$.

5. (a) Soit $a > 0$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur $[a, +\infty[$, en posant pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \phi(x, t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$:

   - Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
   - $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \phi(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
   - Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-xt} = -g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}$,
   - $\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant t\left|f(t)\right|\mathrm{e}^{-at} = \left|g_1(t)\right|\mathrm{e}^{-at}$ et, selon [**I.3**], $t \mapsto g_1(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable car $g_1 \in E$,

   Donc $\mathcal{L}(f)$ est C^1 sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[,\quad \left(\mathcal{L}(f)\right)'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(g_1)(x)$.

   Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \left(\mathcal{L}(f)\right)' = -\mathcal{L}(g_1).}$

   (b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

   $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n sur $]0, +\infty[$ et $\left(\mathcal{L}(f)\right)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$:

   Initialistion : pour $n = 0$, puisque, selon [**a**], $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, à fortiori, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^0 sur $]0, +\infty[$ et l'égalité est immédiate car $g_0 = f$;

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons le résultat vrai pour n, en appliquant [**a**] à g_n qui appartient à E d'après [**4**], on obtient que $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\left(\mathcal{L}(g_n)\right)' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$, car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t\,g_n(t) = g_{n+1}(t)$.

   On a donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]0, +\infty[$ et $\left(\mathcal{L}(f)\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(g_n)$.

   $\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{L}(f) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \left(\mathcal{L}(f)\right)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n).}$

Partie II

1. (a) $f \in F$ donc $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ donc

$$\forall x > 0,\ |\mathcal{L}(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x}.$$

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

(b) On retrouve ici les hypothèses de la question [**4**] : f de classe C^1, croissante et bornée.
On a donc $\forall x > 0,\ x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$.
Mais, de plus, f' est bornée donc $f' \in F$ et donc, suivant [**a**], $\mathcal{L}(f')(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
et donc $\boxed{x\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)\ .}$

2. (a) On a $f \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \big|f(t)\big| = \big|\ell\big| < \big|\ell\big| + 1$ et
donc $\exists\, A \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \geqslant A,\quad \big|f(t)\big| \leqslant \big|\ell\big| + 1$.
D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle y est bornée. On a ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \big|f(t)\big| \leqslant \max\Big(\sup_{u\in[0,A]}\big|f(u)\big|, \big|\ell\big| + 1\Big)$.
Ainsi $\boxed{f \in F.}$

(b) En effectuant le changement de variable affine $t = \frac{u}{a_n}$, on a

$$a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-a_n t}\,\mathrm{d}t = a_n \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{a_n}\mathrm{d}u$$

soit $\underline{a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u \text{ avec } \forall u \in \mathbb{R}_+,\ h_n(u) = f\left(\frac{u}{a_n}\right)\mathrm{e}^{-u}}\ .$

(c) Comme le dit l'énoncé, utilisons le théorème de convergence dominée :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n \in C^0\big(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R}_+,\quad \big|h_n(u)\big| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$ et $u \mapsto \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- h_n converge simplement vers h sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(u) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-u} & \text{si } u > 0 \\ f(0) & \text{si } u = 0 \end{cases}$ car $\frac{u}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si $u > 0$,
- h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc $\int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u = \ell \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ce qui donne, avec le résultat du [**b**],

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell.}$

(d) Ceci est vrai pour toute suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers 0 donc la caractérisation séquentielle de la limite permet de conclure que $\lim\limits_{x\to0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$ ce qui donne,

$$\boxed{\text{si } \ell \neq 0,\ \mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}\ .}$$

3. (a) Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $[x, +\infty[$ pour $x \geqslant 0$, R est définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R(x) = R(0) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et c'est une primitive de f.
On a donc $\boxed{R \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } R' = -f.}$
On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question [**4**] à R qui n'est pas croissante en général. Cependant, d'une part $R' = -f$ appartient à E car $f \in E$ (hypothèse de la partie), d'autre part, R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc R appartient à F selon [**2.a**] et la démonstration de l'égalité au [**4**] n'utilise que que le caractère borné de la fonction f et le fait que f et f' soient dans E. Cette démonstration s'applique donc à R et donc $\boxed{\forall x \geqslant 0, \mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x).}$

(b) On a déjà indiqué ci-dessus que $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t) = 0$ donc
$\underline{\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A \in \mathbb{R}_+,\quad \forall t \geqslant A,\ \big|R(t)\big| \leqslant \varepsilon}\ .$
On a donc, pour $x > 0$, selon [**a**],

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}(f)(x)-R(0)\right| &= \left|x\mathcal{L}(R)(x)\right| \\
&= x\left|\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant x\int_0^{+\infty}\left|R(t)\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{car } R\in E \\
&\leqslant x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_A^{+\infty}\left|R(t)\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t + x\int_A^{+\infty}\varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{car } \mathcal{U}\in E \\
&\leqslant x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t + x\int_0^{+\infty}\varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\forall x>0,\ \left|\mathcal{L}(f)(x)-R(0)\right|\leqslant x\int_0^{A}\left|R(t)\right|\mathrm{d}t+\varepsilon}$.

(c) A étant fixé, $x\int_0^A\left|R(t)\right|\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists\eta>0,\ \forall x\in]0,\eta[,\quad 0\leqslant x\int_0^A\left|R(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$ donc $\forall x\in]0,\eta[,\ \left|\mathcal{L}(f)(x)-R(0)\right|\leqslant 2\varepsilon$. Donc $\underline{\mathcal{L}(f)\text{ se prolonge en 0 par }\mathcal{L}(f)(0)=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Remarque : *Dans le cas où, comme ici, f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, une simple application du théorème de convergence dominée donne le résultat ci-dessus. La démonstration proposée par l'énoncé a l' intérêt de s'appliquer aussi au cas où f n'est pas intégrable mais d'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ improprement convergente comme l'énoncé lui-même le souligne.*

Partie III

1. La fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\frac{\sin t}{t}\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}1$ et on a, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\cos(1)-\frac{\cos x}{x}-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\cos(1)-\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\}
\end{aligned}$$

car, d'une part, $\left|\frac{\cos x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et, d'autre part, $\frac{\cos t}{t^2}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

$\boxed{\text{Donc } F \text{ admet une limite réelle } \ell \text{ en } +\infty.}$

2. Si f était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\sum_{n=0}^{N}u_n=\int_0^{(N+1)\pi}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t$. Mais

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{t}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{(n+1)\pi}$$

ce qui montre que $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge. Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$

3. On peut écrire $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin t = \Im m\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\int_0^X \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \Im m\left(\int_0^X \mathrm{e}^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \Im m\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^X\right)\\
&= \Im m\left(\frac{\mathrm{e}^{(-x+i)X}-1}{-x+i}\right)\\
&= \Im m\left(\frac{(-x-i)\Big[\big(\cos X + i\sin X\big)\mathrm{e}^{-xX}-1\Big]}{x^2+1}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne bien $\underline{\forall x > 0,\ \forall X > 0,\quad \int_0^X \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2+1}\Big[\big(\cos X + x\sin X\big)\mathrm{e}^{-xX}-1\Big]}$.

$\sin \in F$ donc $\sin \in E$ donc pour tout $x > 0,\ t \mapsto \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

En passant à la limite quand X tend vers $+\infty$ dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\boxed{\forall x > 0,\quad \int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2+1}}.$$

4. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc , selon [**II.2.a**], $f \in F$.

   Donc $f \in E$ et la question [**5.a**] donne $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(\sin)$ soit, d'après [**c**], $\forall x > 0,\ (\mathcal{L}(f))'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.

   Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que donc $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = C - \operatorname{Arctan} x$. Mais, selon la question [**II.1.a**], $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ soit $C = \frac{\pi}{2}$.

   Finalement, $\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}$.

   Comme on en a fait la remarque à la fin de la question [**II.2**], l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat du [**II.3.c**] : il est suffisant que $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour cela. Donc $\lim_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

   Or $\lim_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \frac{\pi}{2}$

   ce qui donne $\boxed{\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$.