A rendre le mardi 3 janvier

PROBLEME : Autour de la transformation de Laplace

Dans tout ce problème, on note :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout f dans E, on appelle transformée de Laplace de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt.$$

Partie I : Exemples et propriétés

1. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$.

   (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   (c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$.

2. (a) On considère la fonction $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $U(t) = 1$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$. Déterminer $\mathcal{L}(U)$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

   $$h_\lambda(t) = e^{\lambda t}$$

   Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

3. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \to t^n f(t)$ de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leqslant e^{-xt/2}$ pour tout $t \geqslant A$.
   En déduire que g_n est un élément de E.

4. Transformée de Laplace d'une dérivée
   Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

   $$\forall x \in]0, +\infty[, \ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

5. Régularité d'une transformée de Laplace

   (a) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = \mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 3.

   (b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E.

1. On suppose dans cette question que f est dans F.

   (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

   (b) Théorème de la valeur initiale
   On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

2. Théorème de la valeur finale.
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$ où l est un réel. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

   (a) Démontrer que f appartient à F.

   (b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0+\infty[$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

   (c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = l$.

   (d) Lorsque $l \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

   Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} f(t)\,dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

3. (a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
   En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

   (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
   Justifier l'existence de A réel positif tel que pour tout $t > A$, on ait $R(t) \leqslant \varepsilon$.
   En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

   $$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)|\,dt + \varepsilon.$$

   (c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

1. Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ admet une limite réelle l en $+\infty$.
2. En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\, dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :
$$\int_0^X (\sin t)\, e^{-xt}\, dt = -\frac{1}{1+x^2}\left(e^{-xX}(x \sin X + \cos X) - 1\right).$$
Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt}\, dt$.
4. Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire l.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la partie II) :
Lorsque f dans E vérifie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\, dt = l \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = l$.
On notera que, par rapport à la partie II, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\, dt = l \in \mathbb{R}$.