

## Problème- Centrale PSI - 2001

### Partie I

I.A On a  $\langle C_0 | C_0 \rangle = 1$  et pour  $n \geq 1$   $\langle C_0 | C_n \rangle = \int_0^1 \sqrt{2} \cos(n\pi x) dx = \left[ \frac{\sqrt{2}}{n} \sin(n\pi x) \right]_0^1 = 0$ .

Enfin, si  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ , avec  $n \neq p$ ,

$$\begin{aligned} \langle C_n | C_n \rangle &= 2 \int_0^1 \cos^2 n\pi x dx \\ &= \int_0^1 (1 + \cos(2n\pi)x) dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle C_n | C_p \rangle &= 2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \cos(p\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \cos((n+p)\pi x) + \cos((n-p)\pi x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{(n+p)\pi} \sin((n+p)\pi x) \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{(n-p)\pi} \sin((n-p)\pi x) \right]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La suite  $C$  est bien orthonormale.

De même, la suite  $S$  est également orthonormale.

I.B .

I.B.1 Notons  $p = \Pi_{\Phi}^n(f)$ .

On dispose naturellement de  $f = p + f - p$  et  $(f - p) \perp p$  donc  $\|f\|^2 = \|p\|^2 + \|f - p\|^2$  d'après Pythagore.

Montrons que  $\|f - p\| = d_{\Phi}^n(f)$ .

Comme  $p \in V_{\Phi}^n$ , on a  $\|f - p\| \geq d_{\Phi}^n(f) = \inf_{q \in V_{\Phi}^n} \|f - q\|$ .

Mais si  $q \in V_{\Phi}^n$ , on peut écrire  $f - q = f - p + p - q$  et  $f - p$  étant orthogonal à  $V_{\Phi}^n$ , on a  $f - p \perp p - q$  d'où, toujours d'après Pythagore,  $\|f - q\|^2 = \|f - p\|^2 + \|p - q\|^2 > \|f - p\|^2$  si  $p \neq q$ .

Ainsi  $p$  est-il l'unique point de  $V_{\Phi}^n$  qui réalise le minimum de la distance de  $f$  à  $V_{\Phi}^n$ .

I.B.2 D'après ce qui précède, pour  $\|f\| = 1$ ,  $\|\Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \|f\| = 1$ . Mais prenant par exemple  $f = \Phi_0$  on obtient  $\|\Pi_{\Phi}^n(\Phi_0)\| = \|\Phi_0\| = 1$  donc la borne supérieure cherchée vaut 1.

I.B.3 On a :  $\Pi_{\Phi}^n(f) = \sum_{k=0}^n \langle \Phi_k | f \rangle \Phi_k$  car la famille  $\{\Phi_j, 0 \leq j \leq n\}$  forme une B.o.n de  $V_{\Phi}^n$ .

Le 1. indique que pour tout entier  $n$  on a  $\left\| \sum_{k=0}^n \langle \Phi_k | f \rangle \Phi_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle \Phi_k | f \rangle^2 \leq \|f\|^2$ .

La série à termes réels positifs  $\sum_{k \geq 0} \langle \Phi_k | f \rangle^2$  est donc bien convergente (car ses sommes partielles sont

majorées) et du plus sa somme est plus petite que  $\|f\|^2$ . C'est l'inégalité de Bessel.

I.C .

I.C.1 a) Fixons  $k$ .

Comme  $f_k \in V_{\Phi}$ , il existe  $N = \min\{n \in \mathbb{N}, f_k \in V_{\Phi}^n\}$ . Alors, pour  $n \geq N$ ,  $f_k \in V_{\Phi}^n$  donc  $\Pi_{\Phi}^n(f_k - f) = f_k - \Pi_{\Phi}^n(f)$  et le résultat souhaité est immédiat.

b) On en déduit, pour  $n \geq N$  :  $\|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \|f - f_k\| + \|\Pi_{\Phi}^n(f_k - f)\| \leq 2\|f - f_k\|$ , puisque pour toute fonction  $g \in E$  on a vu que  $\|\Pi_{\Phi}^n(g)\| \leq \|g\|$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , et  $k$  choisi de sorte que  $\|f - f_k\| \leq \varepsilon/2$ , et enfin  $N$  choisi de sorte que  $f_k \in V_{\Phi}^N$ . Alors on

aura :  $\forall n \geq N, \|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| \leq \varepsilon$ . C'est-à-dire qu'on a bien :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\| = 0$ .

I.C.2 L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) découle immédiatement de ce qui précède.

Inversement, (ii) signifie que la suite de terme général  $f_k = \Pi_{\Phi}^k(f)$  converge vers  $f$ .

I.C.3 On a écrit  $\|f\|^2 = \|\Pi_{\Phi}^n(f)\|^2 + \|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^n (f | \phi_k)^2 + \|f - \Pi_{\Phi}^n(f)\|^2$ . Passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (f | \Phi_k)^2$ .

Utilisant l'égalité du 2.a, nous obtenons alors : 
$$d_{\Phi}^n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (f | \Phi_k)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (f | \Phi_k)^2.$$

I.D .

I.D.1  $\tilde{f}$  est définie sur  $[-1, 1]$  par  $\tilde{f}(x) = f(|x|)$ . Ainsi  $\tilde{f}(-1) = \tilde{f}(1) = f(1)$ , et donc on a bien défini une fonction 2-périodique continue sur  $\mathbb{R}$  par recollement de la période  $[-1, 1]$ .

I.D.2 La fonction  $h$  considérée est paire,  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème de Parseval assure donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (h - S_n(h))^2 = 0$ , où  $S_n(h)$  est la  $n$ -ième somme de Fourier de  $h$ .

Or, pour tout  $x$ ,

$$S_n(h)(x) = a_0(h)/2 + \sum_{k=1}^n a_k(h) \cos kx,$$

avec

$$a_0(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2\langle f | C_0 \rangle$$

et, pour  $k \geq 1$ ,

$$a_k(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \cos kx dx = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) C_k(t) dt = \sqrt{2}\langle f | C_k \rangle.$$

Donc on peut écrire, pour  $t \in [0, 1]$  :  $S_n(h)(\pi t) = \langle f | C_0 \rangle C_0(t) + \sum_{k=1}^n \langle f | C_k \rangle C_k(t) = \Pi_C^n(t)$ .

Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (h - S_n(h))^2 = 2 \int_0^{\pi} (h - S_n(h))^2(x) dx = 2\pi \int_0^1 (f(t) - \Pi_C^n(t))^2 dt = 2\pi \|f - \Pi_C^n\|^2$$

tend bien vers zéro, et la suite  $C$  est totale dans  $E$ .

I.D.3 On a, pour tout  $n \geq 0$ ,  $(C_{2n} | C_1) = 0$ , donc  $1 = \|C_1\|^2 \neq \sum_{n=0}^{+\infty} (C_1 | C_{2n})^2 = 0$  :

c'est dire que la suite  $(C_{2n})$  qui est bien sûr orthonormale, n'est pas totale.

II.A .

II.A.1 Toute fonction lipschitzienne est continue (et même uniformément) sur  $I$ .

Si  $f_1$ , respectivement  $f_2$ , est lipschitzienne de rapport  $C_1$ , respectivement  $C_2$ , alors  $f_1 + f_2$  est lipschitzienne de rapport  $C_1 + C_2$  (au plus) et, pour tout réel  $\lambda$ ,  $\lambda f_1$  est lipschitzienne de rapport  $|\lambda|C_1$ .

Lip( $I, \mathbb{R}$ ), qui n'est évidemment pas vide, est donc un sous-espace de  $C^0(I, \mathbb{R})$ .

$x \mapsto x$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ , mais  $x \mapsto x^2$  ne l'est pas, car, pour  $x = n \in \mathbb{N}^*$  et  $y = 0$ , on a :  $\left| \frac{n^2 - 0}{n - 0} \right| = n$  non borné. Il n'y a pas stabilité pour le produit.

L'existence de  $k(f)$  découle directement du théorème de la borne supérieure : toute partie majorée non vide de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.

II.A.2 Supposant l'intervalle  $I$  compact, deux applications lipschitziennes  $f_1$ , respectivement  $f_2$ , de rapport  $C_1$ , respectivement  $C_2$ , sont bornées sur  $I$  puisque continues : soit  $M_1 = \sup_{x \in I} |f_1(x)|$  ( $M_2$  est définie de même). Alors  $f_1 \times f_2$  est lipschitzienne de rapport  $M_1 C_2 + M_2 C_1$  puisqu'on peut écrire, pour  $(x, y) \in I^2$  :

$$|f_1(x)f_2(x) - f_1(y)f_2(y)| = |(f_1(x) - f_1(y))f_2(x) + f_1(y)(f_2(x) - f_2(y))| \leq (C_1 M_2 + C_2 M_1)|x - y|.$$

Ceci qui permet de conclure qu'on a une algèbre (car  $Id$  y appartient aussi).

En revanche  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie, continue mais non lipschitzienne sur  $[0, 1]$ , puisque, faisant  $1 \geq x > y = 0$ ,

$$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ qui n'est pas borné sur } ]0, 1].$$

II.B Si  $f$  est lipschitzienne,  $f'$  est bornée, puisque, pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq k(f)$ .

Inversement, c'est le théorème des accroissements finis qui dit que  $f$  est lipschitzienne et que  $k(f) \leq \sup_{x \in I} |f'(x)|$ .

Enfin, on a montré à la fois l'équivalence souhaitée et la formule  $k(f) = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ .

II.C Soit  $K$  un majorant de la suite  $(k(f_n))$  : ayant fixé deux réels  $x$  et  $y$  de  $I$ , on aura, pour tout entier  $n$  :  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$ . On peut passer à la limite :  $f$  est lipschitzienne et  $k(f) \leq K$ .

II.D .

II.D.1 Il suffit de choisir  $\hat{g}$  paire et 2-périodique et cette fonction vérifie  $k(\hat{g}) = k(g) \leq 1$ .

II.D.2 Pour tout  $n$  fixé, la continuité de  $\hat{g}$  suffit à écrire que  $g_n$  est de classe  $C^1$  avec :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, g'_n(x) = n(\hat{g}(x + 1/n) - \hat{g}(x)), \text{ et } |g'_n(x)| \leq n \times k(\hat{g}) \times (1/n) = k(\hat{g}) \leq 1.$$

Le changement de variable  $t \mapsto u = n(t - x)$  de classe  $C^1$  fournit

$$g_n(x) = \int_0^1 \hat{g}(x + u/n) du$$

et, comme  $\hat{g}$  est 1-lipschitzienne :

$$|g_n(x) - \hat{g}(x)| \leq \int_0^1 |\hat{g}(x + u/n) - \hat{g}(x)| du \leq \int_0^1 (u/n) du = \frac{1}{2n}.$$

On en déduit la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  de  $(g_n)$  vers  $\hat{g}$ .

II.E .

II.E.1 Si  $n \geq 1$ , Par IPP comme toutes les fonctions sont  $C^1$

$$\begin{aligned} \langle f | C_n \rangle &= \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos n\pi t dt \\ &= \sqrt{2} \left[ f(t) \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 - \sqrt{2} \int_0^1 f'(t) \frac{\sin n\pi t}{n\pi} dt = -\frac{1}{n\pi} \langle f' | S_{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

II.E.2  $f'$  est continue, et la suite  $(S_{n-1})$  est orthonormale, donc on a vu que  $\sum (f' | S_{n-1})^2$  est convergente, de somme majorée par  $\|f'\|^2$ . (Question I.B.3).

On en déduit que la série de terme général  $n^2 \langle f | C_n \rangle^2$  est convergente, de somme majorée par  $\frac{1}{\pi^2} \|f'\|^2$ .

II.F .

II.F.1 Remarque préliminaire : si  $\phi$  et  $\psi$  sont continues sur  $[0, 1]$  et si  $(\phi_p)$  est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $\phi$ , alors  $\langle \phi | \psi \rangle$  est la limite de la suite de terme général  $\langle \phi_p, \psi \rangle$  : en effet  $|\langle \phi - \phi_p | \psi \rangle| \leq \|\phi - \phi_p\|_\infty \|\psi\|_\infty$  (où  $\|\psi\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\psi(x)|$ ) et on a supposé  $\lim \|\phi - \phi_p\|_\infty = 0$ .

Considérons donc maintenant  $f$  lipschitzienne et  $g = f/k(f)$ .  $g$  est 1-lipschitzienne, et donc limite uniforme sur  $[0, 1]$  d'une suite de fonctions  $(g_p)_{p \geq 1}$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et de dérivées bornées par 1. (Question II.D)

Ainsi a-t-on, pour tout  $p \geq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \langle g_p | C_n \rangle^2 \leq 1/\pi^2$ .

Pour tout  $n$  fixé, on dispose de  $\forall p \geq 1, \sum_{k=1}^n k^2 \langle g_p | C_k \rangle^2 \leq 1/\pi^2$ , donc, passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , on obtient, pour tout  $n$  :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \langle g | C_k \rangle^2 \leq 1/\pi^2.$$

C'est à dire que la série  $\sum_n n^2 \langle g | C_n \rangle^2$  converge, de somme majorée par  $1/\pi^2$ .

Multipliant par  $k(f)^2$ , on en déduit la convergence et l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \langle f | C_n \rangle^2 \leq \frac{k(f)^2}{\pi^2}.}$$

II.F.2 Alors :

$$\left( n d_C^{n-1}(f) \right)^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} n^2 \langle f | C_k \rangle^2 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} k^2 \langle f | C_k \rangle^2 \leq k(f)^2 / \pi^2,$$

$$\boxed{\text{d'où } d_C^{n-1}(f) \leq \frac{k(f)}{n\pi}.}$$

### Partie III

III.A Avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle Q_n | Q_m \rangle &= \frac{\alpha_n}{2^n n!} \frac{\alpha_m}{2^m m!} \int_0^1 P_n(2x-1) P_m(2x-1) dx \\ &= \frac{\alpha_n}{2^n n!} \frac{\alpha_m}{2^m m!} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \frac{\alpha_n^2}{2^{2n+1} n!^2} \frac{1}{2n+1}, & \text{si } m = n \end{cases} \end{aligned}$$

La suite est donc orthonormale si et seulement si on choisit de poser  $\alpha_n = \sqrt{2n+1}$  pour tout entier  $n$ .

Observons que  $U_n$  est un polynôme de degré  $2n$ , donc  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes de degré  $2n - n = n$ . On a donc facilement que  $V_Q^n = \mathbb{R}_n[X]$ , espace des polynômes de degré au plus égal à  $n$ .

III.B .

III.B.1 On a déjà vu que, si  $n \geq 0$ ,

$$d_Q^n(f)^2 - d_Q^{n+1}(f)^2 = \left( \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (f | Q_k)^2 \right) - \left( \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (f | Q_k)^2 \right) = (f | Q_n)^2 \geq 0.$$

C'est bien dire la décroissance de la suite de réels positifs  $(d_Q^n(f))$ .

III.B.2 Comme  $d_Q^n(f) = \|\Pi_Q^n(f) - f\|$ , d'après I.C.2, il suffit bien de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_Q^n(f) = 0$  pour toute fonction  $f \in E$  pour prouver que  $Q$  est totale.

Soit donc  $f$  dans  $E$ , et, grâce au théorème de Weierstrass, il existe  $(T_k)_{k \geq 0}$  une suite de polynômes convergeant uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $f$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ .

Il existe  $k \geq 0$  tel que  $\|T_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . Soit  $n$  le degré de  $T_k$  :  $T_k \in \mathbb{R}_n[X] = V_Q^n$ . Alors  $\Pi_Q^n(T_k) = T_k$  et on peut écrire :

$$d_Q^n(f) = \|\Pi_Q^n(f) - f\| = \|\Pi_Q^n(f - T_k) + T_k - f\| \leq \|\Pi_Q^n(f - T_k)\| + \|T_k - f\| \leq 2\|T_k - f\| \leq 2\|T_k - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

(On a déjà dit, pour toute fonction continue :  $\|\Pi_Q^n(f)\| \leq \|f\| \leq \|f\|_\infty$ .)

La décroissance permet de conclure :  $\forall m \geq n, d_Q^m(f) \leq 2\varepsilon$ , ce qu'on voulait démontrer.

III.B.3  $Q_0 = 1$  et clairement  $\Phi_0$  doit valoir  $\pm 1$ .

Plus généralement, montrons par récurrence qu'on doit choisir  $\Phi_n = \pm Q_n$ .

Supposons construit de cette façon  $(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n}$ . Alors  $\Phi_{n+1}$  étant de degré  $n+1$  est dans  $V_Q^{n+1}$ , et s'écrit comme combinaison linéaire des  $(Q_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ . Comme on doit avoir  $\Phi_{n+1}$  orthogonal à tous les  $\Phi_k$  et donc à tous les  $Q_k$  pour  $k \leq n$ , seul le dernier coefficient est non nul :  $\Phi_{n+1} = \omega Q_{n+1}$ . On conclut que  $\omega = \pm 1$  en imposant  $\|\Phi_{n+1}\| = 1$ .

III.C Le théorème de Leibniz fournit :

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{d^n}{dX^n} ((X-1)^n (X+1)^n) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} (X-1)^n \frac{d^k}{dX^k} (X+1)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} (X-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (X+1)^{n-k} \\
 &= n! \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \right)^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

III.D .

III.D.1 La remarque de l'énoncé se vérifie aisément : il suffit de développer.

Alors, pour  $|x| \leq 1$  et  $n \geq 0$  (ce qui permet de définir sans difficulté la puissance  $n$ -ième d'un complexe), on dispose de :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{i\theta} \right)^n \left( \sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}} e^{-i\theta} \right)^n d\theta.$$

L'égalité

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

permet dans le développement du produit ci-dessus de ne garder que quelques termes :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \sqrt{\frac{1+x}{2}}^{2(n-k)} i^{2k} \sqrt{\frac{1-x}{2}}^{2k} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} P_n(x) \\
 &= L_n(x).
 \end{aligned}$$

III.D.2 Or

$$|x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta|^2 = x^2 + (1-x^2) \cos^2 \theta = \cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta \text{ leqslant } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

et il en découle aussitôt que  $\|L_n\|_{\infty} \leq 1$ .

Mais  $L_n(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^n d\theta = 1$ , donc finalement  $\|L_n\| = 1$ .

De même  $L_n(-1) = (-1)^n$ .

Si  $-1 < x < 1$ , on a

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta|^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta)^{n/2} d\theta < 1.$$

Donc seuls  $x = 1$  et  $x = -1$  vérifient  $|L_n(x)| = 1$ .

III.E .

III.E.1 Dérivant  $n+1$  fois l'égalité  $(X^2-1)U'_n = 2nXU_n$ , on obtient :

$$2 \frac{n(n+1)}{2} P_n + 2(n+1)XP'_n + (X^2-1)P''_n = 2n(n+1)P_n + 2nXP'_n$$

donc

$$(1-X^2)P''_n - 2XP'_n + n(n+1)P_n = 0.$$

III.E.2 On en déduit aussitôt que  $(X^2 - 1)L_n'' = -2XL_n' + n(n+1)L_n$ .

Or  $2^{n+1}(n+1)!L_{n+1}' = \left( (X^2 - 1)U_n \right)^{(n+2)} = (X^2 - 1)P_n'' + 2(n+2)XP_n' + (n+1)(n+2)P_n$ , et, simplifiant par le facteur  $2^n n!$ , il vient :

$$\begin{aligned} 2(n+1)L_{n+1}' &= (X^2 - 1)L_n'' + 2(n+2)XL_n' + (n+1)(n+2)L_n \\ &= 2(n+1)XL_n' + (n+1)(2n+2)L_n \\ &= 2(n+1)(XL_n' + (n+1)L_n) \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

III.F Comme les polynômes  $U_n$  sont pairs, les polynômes  $P_n$  et donc  $L_n$  sont pairs ou impairs et les  $L_n'$  aussi. Or  $L_0' = 0$ , et  $L_n$  atteint (sur  $[0, 1]$ ) son maximum en 1 :  $L_n(1) = 1$ .

Ainsi, par une récurrence immédiate, le maximum de  $L_n'$  sera atteint en  $x = 1$  et vérifie  $L_{n+1}'(1) = L_n'(1) + n + 1$ ,

$$\text{donc } L_n'(1) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Or  $Q_n'(x) = 2\alpha_n L_n'(2x - 1)$ , et

$$k(Q_n) = \|Q_n'\|_\infty = 2\alpha_n \|L_n'\|_\infty = 2\sqrt{2n+1} \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\sqrt{2n+1}.$$

Ainsi  $k(Q_n) = n(n+1)\sqrt{2n+1}$