A rendre le mardi 10 avril

PROBLEME

Notations

- Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n\geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ son algèbre d'endomorphismes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $Mat(u, \mathcal{B})$ la matrice de u sur la base $\mathcal{B}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p non nul. on note $u^p = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{p\,fois}$. On pose $u^0 = Id$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *commutant de* u l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u ; on a :
$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$
On rappelle que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u, on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id).$$

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a :

$$E = \underset{1\leqslant i\leqslant p}{\oplus} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1\leqslant i\leqslant p$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On rappelle que la base $\mathcal{B}$ est dite adaptée à la somme directe $E = \underset{1\leqslant i\leqslant p}{\oplus} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p, une base $(e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = \left(e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{n_p}^p\right)$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u. Que peut-on dire de u_i ?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si, sur une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \underset{1\leqslant i\leqslant p}{\oplus} E_{\lambda_i}(u)$:
$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & V_p \end{pmatrix}$$
avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1\leqslant i\leqslant p$.

4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

Partie II : Etude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On notera $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$.
2. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $X^2 = A$ alors X commute avec A.
3. On note $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $\Delta = P^{-1}XP$. Montrer que $X^2 = A \iff \Delta^2 = D$.
4. En déduire la forme de Δ.
5. Déterminer l'ensemble des solutions à l'équation $X^2 = A$.Y-a-t-il un nombre fini de solutions ?

Partie III : Commutant d'un endomorphisme nilpotent

On suppose que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice n, c'est à dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E \setminus \operatorname{Ker} f^{n-1}$ et montrer que la famille $\mathcal{B}' = \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice M' de f dans cette base.
3. Soit $g \in C(f)$.
   (a) Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)$.
   (b) Montrer alors que pour tout k de $[|0, n-1|]$, $g\left(f^k(x_0)\right) = \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k} f^i(x_0)$.
   (c) En déduire que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme : $\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.
4. Réciproquement on suppose que g est un endomorphisme de E qui a pour matrice dans la $\mathcal{B}'$
   $N = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.
   Montrer alors que M' et N commutent.
   En déduire que g commute avec f.
5. Montrer alors que $C(f) = \operatorname{Vect}\,(Id_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.
6. Montrer que la famille $(Id_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre de $C(f)$.
7. Quelle est alors la dimension de $C(f)$?

Partie IV : Commutant d'un endomorphisme u vérifiant la relation (1) :

$$(u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0. \tag{1}$$

Id désigne l'application identique de E. On rappelle que :

$$(u - 2Id)^2 = (u - 2Id) \circ (u - 2Id).$$

On pose $E_1 = \operatorname{Ker}(u - Id)$ et $E_2 = \operatorname{Ker}(u - 2Id)^2$, $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$; on suppose de plus $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ et $n \geqslant n_2$.

1. En remarquant que $(X-2)^2 + (X-1)(3-X) = 1$, et en posant $V(X) = 1$ et $U(X) = 3 - X$, montrer que : $\mathrm{Id} = U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) + V(u) \circ (u - 2\ \mathrm{Id})^2$.
2. Montrer que :
$$E = E_1 \oplus E_2.$$
On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.
3. Montrer que $p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $p_2 = U(u) \circ (u - Id)$.
En déduire que p_1 et p_2 sont des polynômes ne u.
4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable.
On pourra considérer la matrice de d dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$.
5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2, en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.
On pourra remarquer pour la suite que $w = (u - Id) \circ (u - 2Id)$.
6. (a) Montrer que : $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(d)$ et $v \in \mathcal{C}(w)$.
(b) Montrer que E_1 et E_2 sont stables par w et déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$Mat(w, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$
où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2Id)$ sur E_2 sur une base de E_2.
(c) Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} + N \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$
.
(d) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim(\operatorname{Ker}(u - 2Id))$.
(e) Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si
$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{n_1} & \overleftrightarrow{n_2} \end{array} & \end{array}$$
et
$$V_2 N = N V_2.$$
(f) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$.
On pourra remarquer que $N^2 = 0$.