Devoir surveillé I - PSI

26 septembre 2011

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 4 heures

EXERCICE

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.

$\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n.

On note $\forall i \in [|0, n|]$, $\varphi_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a_i)$.

1. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a_0) = 0\}$.
   (a) Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
   (b) Exhiber une base de H.
   (c) Déterminer un supplémentaire de H.
2. Montrer qu'il existe $(P_0, \ldots, P_n)$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que
$$\forall (i,j) \in [|1, n|]^2,\ \varphi_i(P_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$
3. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa base duale.
4. (a) Soit f un fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [|0, n|],\ f(a_i) = P(a_i)$.
   (b) Montrer que ce polynôme P est unique.

PROBLEME

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera notée I_n et la matrice nulle O_n.

L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :
– v^0 est l'endomorphisme unité,
– $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.
L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par $J(\lambda) = (u_{i,j})$:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},\ u_{i+1,i} = 1, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u_{i,i} = \lambda, \quad u_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice :

$$\alpha(M) = \lim_{m\to+\infty} S_m \text{ avec } S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$$

On admet que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m.

PARTIE I : Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer Ker $(A + I_3)$ et Ker $(A - 2I_3)$.
   Vous préciserez la dimension de ces espaces et exhiberez une base.
2. A-t-on Ker $(A + I_3) \oplus$ Ker $(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$?
3. Déterminer Ker $(A + I_3)^2$.
4. Montrer que Ker $(A + I_3)^2 \oplus$ Ker $(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.
5. On souhaite montrer que la matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Pour cela, en notant u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$, vous déterminez $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ tels que $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = T$.
   Vous donnerez la matrice P de passage.
6. Déterminer les puissances de T, c'est à dire T^k pour $k \in \mathbb{N}$.
   On pourra chercher T^k sous la forme $T^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \end{pmatrix}$.
7. En admettant que pour tout z de $\mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} = e^z$, déterminer $\alpha(T)$.

   On pourra dans quelques semaines en déduire $\alpha(A)$.

PARTIE II : Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.
2. (a) Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n-1$, puis pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$.
   (b) Vérifier que toutes les puissances d'indices strictement positif de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.
3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.
4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

PARTIE III : Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{Ker }(u^i) \subset \text{Ker }(u^{i+j})$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\text{Ker }(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \min\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Montrer que :
   (a) $\forall m < r$, Ker (u^m) est strictement inclus dans Ker (u^{m+1}),
   (b) Ker $(u^r) =$ Ker (u^{r+1}),
   (c) $\forall m \geqslant r,\ \text{Ker }(u^m) = \text{Ker }(u^{m+1})$.

PARTIE IV : Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\text{Im}(v^p)$.
   (a) Montrer que $\text{Im}(w) = \text{Im }(v^{p+q})$.
   (b) Prouver que Ker $(w) \subset$ Ker (v^q).
   (c) En déduire que l'on a

$$\dim(\text{Ker }(v^{p+q})) \leqslant \dim(\text{Ker }(v^p)) + \dim(\text{Ker }(v^q))$$

   (d) En déduire

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \dim(\text{Ker }(v^i)) \leqslant i$$

   (e) Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \dim(\text{Ker }(v^i)) = i$.
2. Prouver alors que v^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul.
3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$$

   soit une base de E.
4. Ecrire la matrice de v dans cette base. Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.
5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.