Correction Devoir surveillé II - PSI

EXERCICE

1. – N'_∞ est bien définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car pour $f \in E$, f' est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$.
   – Pour $f \in E$ telle que $N'_\infty(f) = 0$ alors $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| = 0$ donc f est constante sur $[0,1]$ or $f(0) = 0$ car $f \in E$ donc f estle fonction nulle de E.
   – NNous savons que $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ par le cours donc pour $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ comme $f' \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a
   $$N'_\infty(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f'(x)| = ||\lambda f'||_\infty = |\lambda|.||f'||_\infty = |\lambda| N'_\infty(f),$$
   par homogénéité de la norme $||.||_\infty$.
   – De même, l'inégalité triangulaire pour la norme N'_∞ découle de l'inégalité triangulaire de la norme $||.||_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

   $\boxed{\text{Ainsi } N'_\infty \text{ est une norme sur } E.}$
2. Soit $f \in E$, alors
   $$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)\,du = \int_0^x f'(u)\,du.$$
   car $f(0) = 0$.
   Donc $\forall x \in [0,1]$,
   $$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_0^x f'(u)\,du\right| \\ &\leqslant \int_0^x |f'(u)|\,du \\ &\leqslant \int_0^x N'_\infty(f)\,du \\ &\leqslant N'_\infty(f)x \\ &\leqslant N'_\infty(f) \end{aligned}$$
   Le dernier majorant est indépendantde x, $\boxed{\text{on a donc } N_\infty(f) \leqslant N'_\infty(f).}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$ et $N_\infty(f_n) = 1$ et $N'_\infty(f_n) = n$.
   Ainsi le rapport $\dfrac{N'_\infty(f_n)}{N_\infty(f)} = n$ n'est pas bornée, donc il ne peut pas exister $\beta \in \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall f \in E,\ N'_\infty(f) \leqslant \beta\beta N_\infty(f),$$
   $\boxed{\text{donc les deux normes ne sont pas équivalentes sur } E.}$

Extrait de E3A PC 2011

PROBLEME

Partie I

1. Le calcul donne $K^2 = 4K$, si bien que le polynôme $\boxed{P(X) = X^2 - 4X}$ est un polynôme annulateur de K.
2. Les racines de ce polynôme sont 0 et 4 donc le spectre de la matrice K est inclus dans l'ensemble $\{0,4\}$.
   On remarque que la matrice K est de rang 1 (les colonnes sont non nulles et égales entre elles) donc elle n'est pas inversible, si bien que 0 est une valeur propre de K.
   De plus, si on note C la première colonne de K, on trouve $KC = 4C$, ce qui prouve que 4 est aussi une valeur propre de K car C est un vecteur non nul.

   $\boxed{\text{Finalement, les valeurs propres de K sont exactement 0 et 4.}}$

3. $P(X) = X^2 - 4X = X(X-4)$ est SARS et annule K donc $\boxed{K \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$
   On note $k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à K et (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   En notant C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de K, on a alors $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 \neq 0$ donc la matrice K est de rang 1, et d'après le thm du rang, l'espace propre pour la valeur propre est de dimension 3 et
   $\underline{E_0(k) = \text{Vect }((1,-1,0,0)_{\mathcal{B}}, (1,0,-1,0)_{\mathcal{B}}, (1,0,0,-1)_{\mathcal{B}}).}$
   Comme la somme des dimensions des espaces propres ne peut pas dépasser 4, l'espace propre $E_4(K)$ est de dimension au plus 1.
   Par ailleurs, il est de dimension au moins 1 (d'après la question précédente) donc il est de dimension exactement 1 et d'après ce qui précède $\underline{E_4(k) = \text{Vect }((1,1,1,1)_{\mathcal{B}}).}$
4. Il existe une matrice Q dans $GL_4(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $K = Q\,\text{Diag }(0,0,0,4)Q^{-1}$.
   On trouve alors
$$M = xI_4 + yQ\,\text{Diag }(0,0,0,4)Q^{-1} = xQI_4Q^{-1} + yQ\,\text{Diag }(0,0,0,4)Q^{-1} = Q \times diag(x,x,x,x+4y)Q^{-1}.$$
   La matrice M est donc semblable à Diag $(x,x,x,x+4y)$ qui est diagonale, donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$
   De plus, Les coefficients diagonaux de la matrice diagonale sont x et $x+4y$.
   $\boxed{\text{Les valeurs propres de M sont donc } x \text{ et } x+4y}$ et comme la matrice de passage est identique, on a immédiatement $\boxed{E_x(m) = E_0(k) \text{ et } E_{x+4y}(m) = E_4(k).}$
5. L'ensemble F est défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs I_4 et K. C'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (I_4, K).
   $\boxed{\text{A ce titre, c'est un sous-espace vectoriel de E.}}$ Comme les matrices I_4 et K ne sont pas colinéaires, cet espace est $\boxed{\text{de dimension 2.}}$
6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}*$. Les matrices xI_4 et yK commutent donc il est possible d'appliquer la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned} M^n &= (xI + yK)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (xI)^{n-k}(yK)^k \end{aligned}$$
   Or comme $K^2 = 4K$, par récurrence immédiate, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $K^k = 4^{k-1}K$, ainsi
$$\begin{aligned} M^n &= x^n I_4 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k 4^{k-1} K \\ &= x^n I_4 + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k 4^k\right) K \\ &= x^n I_4 + \frac{1}{4}\left((x+4y)^n - x^n\right) K \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Donc } M^n = x^n I_4 + \frac{1}{2}\left((x+4y)^n - x^n\right) K}.$$
   (b) On sait qu'une matrice est inversible si, et seulement si, elle n'admet pas 0 pour valeur propre. Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible est donc que x et $x+4y$ soient tous deux non nuls.
   Une méthode consiste à intuiter que le résultat montrer pour $n \in \mathbb{N}$ est encore valable lorsque M est inversible pour $n \in \mathbb{Z}$. On pose alors, sous les hypothèses $x \neq 0$ et $x + 4y \neq 0$, $\tilde{M} = \dfrac{1}{x}I_4 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+4y} - \dfrac{1}{x}\right)K$, et on calcule $\tilde{M}M$. On a alors
$$\begin{aligned} \tilde{M}M &= (xI_4 + yK) \times \left(\frac{1}{x}I_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+4y} - \frac{1}{x}\right)K\right) \\ &= I_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+4y} - 1\right)K + \frac{y}{x}K + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{x+4y} - \frac{y}{x}\right)K^2 \\ &= I_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+4y} - 1\right)K + +\frac{y}{x}K + \left(\frac{y}{x+4y} - \frac{y}{x}\right)K \\ &= I_4 \end{aligned}$$
   Donc $\tilde{M}$ est bien l'inverse de M et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{x} I_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+4y} - \frac{1}{x}\right) K.}$$

Une autre méthode pour cette question est d'utiliser que $P(X) = (X-x)(X-(x+4y))$ est un polynôme annulateur de M car M est diagonalisable est et on conlut comme dans l'exerice 5 du TD 5.

Partie II

1. Le calcul donne $K^2 = 4K$, $ZK = 0$, $KZ = 0$ et $Z^2 = 2Z$, ce qui prouve bien que ces quatre matrices appartiennent à H.
   On a immédiatement $H = \text{Vect }(K, Z)$ donc c'est un sous-espace vectoriel de E.
   De plus, prenons maintenant M et N dans H. Il existe a, b, c, d dans R vérifiant les égalités $M = aK + bZ$ et $N = cK + dZ$. On trouve alors $M \times N = acK^2 + adKZ + bcZK + bdZ^2 = 4acK + 2bdZ$, ce qui prouve que $M \times N$ appartient à H.
   Le sous-espace vectoriel H de E est stable par multiplication et $I_n \in H$, $\boxed{\text{c'est ainsi une sous-algèbre de } E.}$
2. La relation $Z^2 = 2Z$ montre que $X^2 - 2X = X(X-2)$ est un polynôme annulateur de Z SARS qui annule Z donc $\boxed{Z \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$
   $\boxed{\text{De plus, les seules valeurs propres possibles de } Z \text{ sont 0 et 2.}}$
   On observe que la matrice Z est de rang 2. En effet, en notant C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes on a (C_1, C_2) libres et $C_3 = -C_1$ et $C_4 = -C_2$.
   La matrice Z admet donc 0 pour valeur propre, avec un espace propre de dimension 2 et $E_0(z) = \text{Vect }((1,0,1,0)_{\mathcal{B}}, (0,1,0,1)_{\mathcal{B}})$
   Le calcul donne
$$Z - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Par le même raisonnement, $\boxed{E_2(z) = \text{Vect }((1,0,-1,0)_{\mathcal{B}}, (0,1,0,-1)_{\mathcal{B}}).}$
3. On nous demande ici de trouver une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres à la fois pour K et pour Z.
   Comme $E_4(K)$ est de dimension 1, il est nécessaire de prendre un vecteur de cette droite.
   Avec les conditions données, il y a deux choix, on peut prendre par exemple ${}^t(1,1,1,1)$.
   Ce vecteur appartient à $E_0(Z)$. On le complète en une base de $E_0(Z)$ avec le vecteur ${}^t(1,-1,1,-1)$..
   Il reste à trouver une base de $E_2(Z)$:
   Une possibilité est de prendre les vecteurs ${}^t(1,1,-1,-1)$ et ${}^t(1,-1,-1,1)$.
   Finalement, la matrice Q est donnée par
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   On vérifie par le calcul que Q est inversibel (de déterminant non nul) et
$$Q^{-1}KQ = \text{Diag }(4,0,0,0) \quad \text{et} Q^{-1}ZQ = \text{Diag }(0,0,2,2)$$
   Donc Q répond à la question.
4. On a alors
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} &= aK + bZ \\ &= aQ\,\text{Diag }(4,0,0,0)Q^{-1} + bQ\,\text{Diag }(0,0,2,2)Q^{-1} \\ &= Q\,\text{Diag }(4a,0,2b,2b)Q^{-1} \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Donc la matrice donnée est bien diagonalisable.}}$
   En fait, on a montré que toutes les matrices qui sont combinaisons linéaires des matrices K et Z sont diagonalisables à l'azide de la matrice Q.

Partie III

1. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ et puis $A^3 = 4A$.

   En particulier, comme A^3 est colinéaire à A, la famille $(A, A2, A3)$ est liée.

2. Ici sur les colonnes rien d'évident, on applique la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang de A.

   Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}L_1$ et $L_4 \leftarrow L_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}L_1$ donnent que L4 . A a le même rang que la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   On effectue ensuite les op´erations $L_3 \leftarrow L_3 - \sqrt{2}L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. La matrice A a le même rang que la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   c'est-'a-dire 2.

   $\boxed{\text{Ainsi le rang de } A \text{ est 2.}}$

   Par ailleurs, la matrice $\boxed{A \text{ n'est pas semblable à } J}$ car ces deux matrices n'ont pas la même trace.

3. Comme $A^3 = 4A$, le polynôme $R(X) = X^3 - 4X = X(X^2 - 4) = X(X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de A.

4. Le spectre de A est donc contenu dans $\{0, 2, -2\}$.

   Comme A est de rang 2, on sait déjà que 0 est une valeur propre de A et que son espace propre $E_0(A)$ est de dimension 2 d'apr'es le théorème du rang.

   De plus comme R est SARS sur $\mathbb{R}$, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   La dimension de chaque espace propre est donc égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

   En particulier, on obtient l'égalité $\dim(E_2(A)) + \dim(E_{-2}(A)) = 2$.

   Comme la trace de A est nulle, on trouve aussi $2\dim(E_2(A)) - 2\dim(E_{-2}(A)) = 0$, ce qui donne finalement $\dim(E_2(A)) = dim(E-2(A)) = 1$.

   $\boxed{\text{Donc Sp } (A) = 0, 2, -2.}$

5. On a déjà justifié que A est diagonalisable et on a trouvé la dimension de ses espaces propres. Il existe une matrice S de $GL_4(\mathbb{R})$ qui vérifie l'égalité $A = S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,2,-2)S^{-1}$.

   On cherche à écrire la matrice A comme une combinaison linéaire de matrices de projections.

   Pour la matrice diagonale obtenue, une telle décomposition s'obtient directement :

$$\mathrm{Diag}\,(0,0,2,-2) = 2\,\mathrm{Diag}\,(0,0,1,0) - 2\,\mathrm{Diag}\,(0,0,0,1).$$

   Posons donc $\boxed{U = S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,1,0)S^{-1} \text{ et } V = S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,0,1)S^{-1}.}$

   On obtient alors les relations $U^2 = U$, $V^2 = V$, $A = 2U - 2V.$.

   On trouve aussi

$$\begin{aligned} UV &= S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,1,0)S^{-1}S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,0,1)S^{-1} \\ &= S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,1,0)\,\mathrm{Diag}\,(0,0,0,1)S^{-1} \\ &= S\,\mathrm{Diag}\,(0,0,0,0)S^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   et $VU = 0$ par un calcul similaire.

   Posons enfin, $\boxed{W = I_4 - U - V.}$

   On trouve $W = S\,\mathrm{Diag}\,(1,1,0,0)S^{-1}$ puis $W^2 = W$ et
   $WU = WV = VW = UW = 0$.

6. Puisque A est diagonalisable et par ce qui précède on a $\boxed{A \text{ qui est semblable à Diag } (2,-2,0,0).}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La question $III.3$ a permis de mettre en évidence un polynôme annulateur de A, on va donc effectuer la division euclidienne de X^n par $R(X) = X(X-2)(X+2)$.
Le théorème de la division euclidienne permet de dire qu'il existe un unique couple (P_1, P_2) tel que
$$X^n = X(X-2)(X+2)P_1(X) + P_2(X) \qquad (**)$$
avec $\deg(P_2) < 3$.
Ainsi, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P_2(X) = aX^2 + bX + c$.
En évaluant l'égalité $(**)$ en 0, 2 et -2 on obtient le système suivant
$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & = & c \\ 2^n = 4a + 2b & & \\ (-2)^n & = & 4a - 2b \end{array}\right.$$
soit
$$\left\{\begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ a & = & \frac{2^n + (-2)^n}{8} \\ b & = & \frac{2^n - (-2)^n}{4} \end{array}\right.$$
Maintenant en utilisant le morphisme d'algèbre à partie de l'égalité $(**)$ et comme $R(A) = 0$, on obtient
$$A^n = aA^2 + bA$$
soit
$$\boxed{A^n = \frac{2^n + (-2)^n}{8} A^2 + \frac{2^n - (-2)^n}{4} A.}.$$

8. (a) On vérifie rapidement que l'application $M \in E \mapsto AM - MA$ est un endomorphisme de E. L'ensemble $Com(A)$ est alors son noyau, ce qui en fait un sous-espace vectoriel de E.
De plus si M et N appartiennent à $Com(A)$, on a alors
$$(MN)A = M(NA) = M(AN) = (MA)N = (AM)N = A(MN)$$
donc $MN \in Com(A)$ et $Com(A)$ est stable par produit donc $\boxed{Com(A) \text{ une sous-algèbre de } E}$ avec ce qui précède.

(b) Prenons une matrice M de E et notons $N = S^{-1}MS$. Un calcul direct donne $AM - MA = S\,\text{Diag } (0,0,2,-2)N - N\,\text{Diag } (0,0,2,-2))S^{-1}$.
On voit donc que M est dans $Com(A)$ si, et seulement si, la matrice N commute avec la matrice diagonale Diag $(0,0,2,-2)$.
Par un calcul direct prouve que les matrices qui commutent avec la matrice diagonale Diag $(0,0,2,-2)$ sont exactement les matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$
On pouvait aussi faire un raisonnement avec les endomorphismes canoniquement associés aux matrices et se servir que lorsque deux endomrophismes commutent les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre comme nous avons fait en cours.
En notant $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ la base canonique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a $Com(A) = \text{Vect } (Di, i = 1..6)$ avec
$$D_1 = SE_{11}S^{-1},\ D_2 = SE_{12}S^{-1},\ D_3 = SE_{21}S^{-1},\ D_4 = SE_{22}S^{-1},\ D_5 = SE_{33}S^{-1}, D_6 = SE_{44}S^{-1}$$
Or cette famille est libre donc $\boxed{Com(A) \text{ est de dimension 6.}}$

(c) Supposons qu'il existe une matrice M dans E qui vérifie l'égalité $M^2 = A$. Dans ce cas, on remarque les ´égalités $AM = M^3 = MA$, si bien que M appartient à l'ensemble $Com(A)$ de la question précédente.
Posons à nouveau $N = S^{-1}MS$. On obtient alors $N^2 = \text{Diag } (0,0,2,-2)$ et N est la forme
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

a, b, e, f, k, p sont six paramètres réels.

En élevant N au carre, on trouve que les deux derniers coefficients diagonaux sont k^2 et p^2. En particulier, l'égalité $N^2 = \text{Diag}\,(0, 0, 2, -2)$ donne $p^2 = -2$, ce qui est impossible puisque p est réel.

$\boxed{\text{Cette impossibilité prouve qu'une telle matrice } M \text{ n'existe pas.}}$