

Devoir surveillé III - PSI**14 novembre 2011**

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 4 heures

EXERCICE

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

1. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On notera $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$. Vous déterminerez aussi P .
2. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $X^2 = A$ alors X commute avec A .
3. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à X .
Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g .
4. Déterminer l'ensemble des solutions à l'équation $X^2 = A$ (On ne cherchera pas toutes les valeurs de X possibles mais on décrira l'ensemble des solutions). Y-a-t-il un nombre fini de solutions ?

PROBLEME I

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel.

PARTIE I

1. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge ssi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.
 - (a) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$.
 - (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On note γ cette limite.
3. On considère l'application h de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par : $h(t) = \frac{\ln t}{t}$.
 - (a) Déterminer le tableau de variation de h .
 - (b) Justifier soigneusement les inégalités : $\forall n \geq 3, \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$.
 - (c) Prouver que la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente.

On pose alors

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

PARTIE II : Calcul de S .

Pour $n \geq 3$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k}, \quad t_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}, \quad \text{et} \quad a_n = t_n - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

1. En utilisant la question I.3.b
 - (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante
 - (b) Encadrer t_n (à l'aide des la question I.3.b) et en déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est minorée.
 - (c) En déduire la nature de la suite $(a_n)_{n \geq 3}$.
2. Montrer que : $\forall n \geq 3, S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \ln 2$.
3. En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n .
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$, en fonction de γ et de $\ln 2$.
5. En déduire la valeur de S en fonction de γ et de $\ln 2$.

PROBLEME II

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On note $E = \mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphisme de E .

L'endomorphisme identité de E est notée Id et sa matrice dans n'importe quelle base est notée I_n .

Pour $y \in E : y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on note $\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$.

Enfin, si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Sp}(f)$ est l'ensemble de ses valeurs propres.

PARTIE I

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base \mathcal{B} . Dans cette partie, on suppose que U n'est pas inversible.

1. Justifier l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = 0$.

2. Prouver qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|u_{ii}| \|x\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}| \|x_j\|$.

On pourra prendre i tel que $\|x\|_\infty = |x_i|$.

3. En déduire qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|u_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}|$.

4. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

PARTIE II

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans la base \mathcal{B} par la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = (m_{i,j})$ où :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, m_{i,j} = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le but de cette partie est de calculer les éléments propres de M sans utiliser son polynôme caractéristique.

1. Calculer le déterminant Δ_n de M .

2. (a) Cette question ne sera traitée que par les 5/2, les 3/2 l'admettront

Justifier que les valeurs propres de M sont réelles.

M se décompose sous la forme : $M = -2I_n + T$ et g désigne l'endomorphisme de E associé à la matrice $T = (t_{i,j})$.

(b) Prouver l'équivalence : $(\lambda \in \text{Sp}(f)) \Leftrightarrow (\lambda + 2 \in \text{Sp}(g))$.

Comparer alors les sous-espaces $\text{Ker}(f - \lambda Id)$ et $\text{Ker}(g - (\lambda + 2)Id)$.

3. Etude des valeurs propres de T .

Soit μ une valeur propre de T .

(a) Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|t_{i,i} - \mu| \leq \sum_{j=1, j \neq i} |t_{i,j}|$.

(b) En déduire que $|\mu| \leq 2$.

Justifier alors l'existence d'un réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\mu = 2 \cos \alpha$.

4. La question consiste à rechercher un $\alpha \in [0, \pi]$ et une suite complexe $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k-1} - 2x_k \cos(\alpha) + x_{k+1} = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que le vecteur représenté dans la base \mathcal{B} par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T

pour la valeur propre $\mu = 2 \cos(\alpha)$, à condition qu'il satisfasse le système.

Dans la suite, cette condition est vérifiée.

(b) Prouver que $\alpha \in]0, \pi[$.

On pourra montrer que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ implique que $\forall k \in \{0, \dots, n+1\}, x_k = 0$ et puis conclure.

(c) Montrer l'existence de deux nombres complexes c_1 et c_2 tels que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}.$$

(d) En déduire les valeurs possibles pour α : $\alpha_j = \frac{j\pi}{n+1}, 1 \leq j \leq n$.

On rappelle que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie deux conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$.

(e) Montrer que les valeurs propres de T sont $\mu_j = 2 \cos(\alpha_j), 1 \leq j \leq n$.

(f) Montrer que T possède n valeurs propres distinctes.

(g) En déduire que T est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de T .

5. Valeurs propres de M .

(a) Prouver que les valeurs propres de M sont les $\lambda_j = -4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(n+1)} \right), 1 \leq j \leq n$ et que les sous-espaces propres associés E_{λ_j} sont de dimension 1.

(b) Déduire de ce qui précède que M est diagonalisable.

PARTIE III : Autour de la matrice M

1. Pour tout réel r strictement positif, on considère les deux matrices :

$$H = 2I_n - rM \text{ et } K = 2I_n + rM.$$

(a) Déterminer les éléments propres de H .

(b) Montrer que H est inversible.

(c) On pose $W = H^{-1}K$.

i. Montrer que W est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de W .

ii. Montrer que $\rho(W) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(W)} |\lambda| < 1$.

iii. En déduire la convergence de la suite de matrices $(W^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

2. Déterminer le commutant de M .