EXERCICE

1. G est une intégrale dépendant d'un paramètre. On note $g : (t,x) \mapsto \dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}$. Alors
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable.
   - $\forall t \in [0,1], x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (-2x)\exp(-x^2(1+t^2))$ est continue sur $[0,1]$
   - Soit $a < b \in \mathbb{R}$, alors $\forall t \in [0,1], \forall x \in [a,b], \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \max(|a|,|b|)$ qui est une constante intégrable sur $[0,1]$

   On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale et en déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ pour tout $a < b$ de $\mathbb{R}$, donc $\underline{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et pour tout réel x :

$$G'(x) = -2x\int_0^1 \exp(-x^2(1+t^2))\,dt = -2x\exp(-x^2)\int_0^1 \exp(-x^2t^2)\,dt.$$

2. On note, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$. Ainsi h est la primitive de $t \mapsto \exp(-t^2)$ qui s'annule en 0 elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \exp(-x^2)$.

   On remarque alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = (h(x))^2$, donc $\underline{H \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$H'(x) = 2h'(x)h(x) = 2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-t^2)\,dt.$$

   En effectuant le changement de variable affine $xu = t$ dans la dernière intégrale, on obtient :

$$H'(x) = 2\exp(-x^2)\int_0^1 \exp(-x^2u^2)x\,du = -G'(x).$$

3. On a donc montré que $G' + H' = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) + G(x) = C$. Or $H(0) = 0$ et $G(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\,\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. $\boxed{\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbb{R},\ G(x) + H(x) = \dfrac{\pi}{4}}$

4. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $G(x)$ positif comme l'intégrale d'une fonction positive et

$$\begin{aligned} G(x) &= \exp(-x^2)\int_0^1 \frac{\exp(-x^2t^2)}{1+t^2}\,dt \\ &\leqslant \exp(-x^2)\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt, \quad \text{car } x^2(1+t^2) \text{ est toujours positif} \\ &\leqslant \frac{\pi}{4}\exp(-x^2). \end{aligned}$$

5. On en déduit que G admet des limites en $\pm\infty$ et que <u>ces deux limites sont nulles.</u>

   D'après la question 3, on en déduit que H admet aussi des limites finies en $\pm\infty$ égales toutes les deux à $\dfrac{\pi}{4}$.

6. $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\exp(-x^2) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissance comparée donc $x \mapsto \exp(-x^2)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après le critère de Riemann et continue sur $[0,1]$ donc $x \mapsto \exp(-x^2)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.Ainsi <u>I existe.</u>

   On vient donc de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$ existe et par ce qui précède et la définition de H, on en déduit que $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$, et comme I est positive (intégrale d'une fonction positive), on en déduit que $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

PROBLEME I
C.C.P Mathématiques 1 PSI 1998

PRELIMINAIRES

P-1.D'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$, donc $\boxed{D(\zeta) =]1, +\infty[}$ (1)

P-2. Domaine de définition de Γ :

- $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $t^{x-1}e^{-t} \sim_{0^+} \dfrac{1}{t^{x-1}}$, donc d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, la fonction est intégrable au voisiange de zéro ssi $1 - x < 1$ ssi $x > 0$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$ ssi $x > 0$.
- $t^{x-1}e^{-t} =_{+\infty} o(\dfrac{1}{t^2})$, par croissance comparée, donc intégrable au voisinage de $+\infty$, donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est donc définie sur } D(\Gamma) =]0, +\infty[}$ (2)

P-3.Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ et $x \longmapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur R_+^* . Soit $\alpha > 0$.

Pour $0 < u < v$, on a par intégration par parties $\displaystyle\int_u^v x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha}\left[x^\alpha e^{-x}\right]_u^v - \frac{1}{\alpha}\int_u^v -x^\alpha e^{-x}dx$.

De $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} v^\alpha e^{-v} = 0$ et $\displaystyle\lim_{u\to 0} u^\alpha e^{-u} = 0$ on déduit $\alpha.\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$, c'est à dire

$\boxed{\text{pour tout } \alpha > 0, \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).}$ (3)

P-4 1 est élément de $D(\Gamma)$ et $\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$

<u>Pour $n \in N^*$</u> , $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...2.1.\Gamma(1)$ et donc par récurrence immédiate on a $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*}$
(4)

PARTIE I

1-1 L'application φ_α est continue sur $]0, +\infty[$; en 0, $e^x - 1 \sim x$ d'où $\varphi_\alpha(x) \sim_0 x^{\alpha-2}$

Il en résulte $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si}\, \alpha > 2 \\ 1 \ \text{si}\, \alpha = 2 \\ +\infty \ \text{si}\, \alpha < 2 \end{cases}$

La fonction φ_α est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ ssi $\alpha \geqslant 2$. $\boxed{\text{Donc, } \Delta(\varphi) = [2, +\infty[.}$ (5)

1-2 Soit $\alpha \geqslant 2$.

φ_α est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$ donc est intégrable sur $[0, 1]$.

En $+\infty$, $\varphi_\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Donc , d'après le théorème de comparaison des fonctions positives, $\boxed{\varphi_\alpha \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$

1-3-1 La somme $\displaystyle U_n = \sum_{p=1}^n u_p$ est donnée par $U_n(0) = 0$ et, pour x >0,

$$U_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{p=0}^n \left(e^{-x}\right)^p = x^{\alpha-1}\frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = x^{\alpha-1}\frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

Quand n tend vers l'infini, la suite $(U_n(0))$ converge vers 0 et, pour $x > 0$, la suite $(U_n(x))$ converge vers $\dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \varphi_\alpha(x)$

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} \text{ si } x > 0 \end{cases}}$ (6)

1-3-2 La fonction u_n est continue sur $[0, +\infty[$, positive et, en $+\infty$, $u_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\boxed{u_n \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$

1-3-3 Soit $\alpha \geqslant 2$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}\frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^x}$$

d'où :

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\Big| \leqslant x^{\alpha-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-}x}.$$

Posons $\psi(x) = x^{\alpha-1}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ pour tout $x > 0$. Alors ψ est continue sur $]0,+\infty[$, positive, en 0, $\psi \sim_0 x^{\alpha-2}$ donc prolongeable par continuité (car $\alpha \geqslant 2$) et en $+\infty$, $\psi(x) =_{+\infty} o(\dfrac{1}{x^2})$, par croissance comparée, donc intégrable. Finalement ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$, domine les sommes partielles, donc d'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir limite et intégrale sur les sommes partielles, c'est à dire : pour $\alpha \geqslant 2$, on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n.(8)}$$

1-3-4 Le changement de variable bijectif $\mathcal{C}^1$, $x \longmapsto nx = t$ donne l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-nx}dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha-1} e^{-t}\frac{dt}{n} = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n = \frac{1}{n^\alpha}\Gamma(\alpha).}$ (9)

1-3-5 On a, pour tout $x > 0$, $\varphi_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et donc d'après la question 1-3-3 on peut intervertir $\sum$ et $\int$:

$$I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n\right) = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

c'est-à-dire $\boxed{\text{pour tout } \alpha \geqslant 2,\ I(\alpha) = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)\ (10)}$.

1-3-6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} x^{-\alpha}dx \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ et donc, pour $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$1 \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

pour $\alpha > 1$, il résulte

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}\zeta(\alpha) = 1 \quad (11)}$$

On pouvait aussi répondre à la question en utilisant le théorème de la double limite (voir cours sur les séries de fonctions).

1-3-7 Pour k infini, $I(k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \Gamma(k)$ donc, pour k entier tendant vers $+\infty$, $\boxed{I(k) \underset{k\to+\infty}{\sim} (k-1)!\ (12).}$

PARTIE II

2-1 Etude de la régularité de H.

2-1-1 Tout d'abord, on remarque que : pour t non nul et x au voisinage de 0, on a $\sin(xt) \underset{x\to 0}{\sim} xt$ et $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $h(x,t) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{xt}{x}$ soit $h(x,t) \underset{x\to 0}{\sim} t$.

Donc

– Pour tout x de $\mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (prolongement par zéro pour $x = 0$).

– Pour tout t de $\mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (prolongement par zéro pour $x = 0$).

2-1-2 La fonction $x \longmapsto h(x,0)$ est nulle donc intégrable sur $[0,+\infty[$ (et d'intégrale nulle)

Pour t non nul,

$$|h(x,t)| = \frac{|\sin(xt)|}{|e^x - 1|} \leqslant \frac{|xt|}{|e^x - 1|}$$

et donc : $x > 0 \Rightarrow \left(|h(x,t)| \leqslant |t| \frac{x}{e^x - 1} = |t|\,\varphi_2(x)\right)$

Puisque φ_2 est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et $o(1/x^2)$ en $+\infty$, φ_2 est intégrable sur $]0,+\infty[$, $\boxed{\text{la fonction } x \longmapsto h(x,t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\text{ , quel que soit } t.}$

2-1-3 Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ on a $(x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [a,b]) \Rightarrow (|h(x,t)| \leqslant \varphi_2(x).\max(|a|,|b|))$ et $\varphi_2 \in L^1(R_+, R_+)$.

Donc d'après la question précédente et ce qui précède, le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique et on obtient que la fonction $H : t \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)dx$ est continue sur $[a,b]$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc H est continue sur $\mathbb{R}$.

2-1-4 Pour $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ $\dfrac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t) = \dfrac{x^p.\sin(xt + p\frac{\pi}{2})}{e^x - 1}$ et donc,

pour $x > 0$, $\left|\dfrac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t)\right| = \dfrac{x^p.|\sin(xt + p\frac{\pi}{2})|}{e^x - 1} \leqslant \varphi_{p+1}(x)$.

D'autre part, $\dfrac{\partial h}{\partial t}(0,t) = 1$ et $\frac{\partial^q h}{\partial t^q}(x,t) = 0$ si $q \geqslant 2$.

L'application partielle $t \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $x \in]0,+\infty[$.

L'application partielle $x \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, pour tout t de $\mathbb{R}$

Enfin, puisque φ_{p+1} est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, H est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $H^{(p)}(t) = \displaystyle\int_{R_+} \frac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t)dx$.

$$\boxed{\text{H est donc de classe infinie et, pour } n \in N^* \text{ , } H^{(n)}(t) = \int_{R_+} \frac{\sin(xt + \frac{n\pi}{2})}{e^x - 1}\, x^n\, dx} \quad (13)$$

2-2 Etude de

2-2-1 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} g_p(x) = \sin(\alpha x)\sum_{p=1}^{n} e^{-px} = \sin(\alpha x)\sum_{p=1}^{n}(e^{-x})^p$

Pour $\alpha = 0$, la suite $\left(\sum\limits_{p=1}^{n} g_p(x)\right)_{n\in N^*}$ est identiquement nulle donc est convergente de limite nulle.

Pour $\alpha \neq 0$, la suite $\left(\sum\limits_{p=1}^{n} g_p(0)\right)_{n\in N^*}$ est identiquement nulle donc est convergente de limite nulle.

Pour $\alpha \neq 0$, la suite $\left(\sum\limits_{p=1}^{n} g_p(x)\right)_{n\in N^*}$ a pour terme général

$$\sin(\alpha x)\frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \sin(\alpha x)\frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1}$$

dont la limite pour n infini est $\begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \in \frac{\pi}{|\alpha|}\mathbb{Z} \\ \infty & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_- \setminus \frac{\pi}{|\alpha|}\mathbb{Z} \end{cases}$

$\boxed{\text{En résumé, pour } \alpha = 0 \ : D(g) = \mathbb{R} \text{ et pour } \alpha \neq 0 \ , \ D(g) = \mathbb{R}_+ \cup \frac{\pi}{|\alpha|}\mathbb{Z}}$. (14) et (15)

2-2-2 Pour $\alpha = 0$, g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha \neq 0$, on a : $\begin{cases} x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} \\ x \in \mathbb{R}_- \cap \frac{\pi}{|\alpha|}\mathbb{Z} \Rightarrow g(x) = 0 \end{cases}$ (16)

2-2-3 Pour $\alpha = 0$, la fonction g_n est nulle donc intégrable sur $[0, +\infty[$ (et d'intégrale nulle)

Pour $\alpha \neq 0$, $|g_n(x)| \leqslant e^{-nx}$ et pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto e^{-nx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

$\boxed{\text{Il en résulte que } g_n \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$. .

2-2-4 On a $H(\alpha) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} h(x, \alpha)dx = \int_{[0,+\infty[} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}dx = \int_{[0,+\infty[} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)\right) dx.$

Il est clair que $\boxed{H(0) = 0}$.

<u>Pour $\alpha \neq 0$,</u>

la fonction $x \longmapsto \frac{|\sin(\alpha x)|}{e^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et majorée sur $[0, +\infty[$ car de limite nulle en $+\infty$. Soit M un majorant.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| H(\alpha) - \sum_{p=1}^{n} \int_{\mathbb{R}_+} g_p(x)\, dx \right| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} |\sin(\alpha x)| dx \leqslant M \left[\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} \leqslant \frac{M}{n}.$$

De $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{M}{n} = 0$, il résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \int_0^{+\infty} g_p(x) dx \right) = H(\alpha)$$

c'est-à-dire $\boxed{H(\alpha) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_p(x) dx}$. (17)

2-2-5 Les fonctions $x \longmapsto e^{-nx}$ et $x \longmapsto \sin(\alpha x)$ sont de classe infinie, on peut donc intégrer par parties autant de fois que nécessaire.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(\alpha x) dx &= \lim_{A \to +\infty} \left(\left[-\frac{e^{-nx} \sin(\alpha x)}{n} \right]_0^A + \frac{\alpha}{n} \int_0^A e^{-nx} \cos(\alpha x) dx \right) \\ &= 0 + 0 + \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{n} \left[\frac{e^{-nx} \cos(\alpha x)}{n} \right]_0^A - \frac{\alpha}{n} \int_0^A e^{-nx} \sin(\alpha x) dx \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} g_n(x)\, dx = \frac{\alpha}{n} \left(0 + \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx \right)$$

et donc

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{\alpha}{n^2}$$

et enfin :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2},$$

et,

$$\boxed{H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2+n^2} \quad (18)}$$

2-2-6 Le développement en série entière de la fonction sinus est $\sin(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!}$, de rayon infini.

Donc,

$$H(t) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!(e^x-1)} \right) dx$$

Puisque $H(-t) = -H(t)$, on se limite au cas $t > 0$

La série $\sum \frac{(-1)^k t^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ est alternée et le terme général $\frac{t^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ tend vers 0 en décroissant quand k tend vers l'infini : elle vérifie donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées et on a, pour $t \in]0,1[$,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \frac{t^{2k+3} x^{2k+3}}{(2k+3)!}.$$

On en déduit, pour $t \in]0,1[$, puis

$$\left| H(t) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} I(2k+2) \right| \leqslant \frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!} I(2n+4).$$

D'après 1.3.7, $I(2n+4) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+3)!$, donc $\frac{t^{2n+3}}{(2n+3)!} I(2n+4) \underset{n\to+\infty}{\sim} t^{2n+3}$ et, puisque $|t| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t^{2n+3} = 0$, on obtient

$$H(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} I(2k+2)$$

c'est-à-dire

$$H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} I(2k+2).$$

2-2-7 On sait que $\lim_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha) = 1$, donc pour k infini, $\left|\zeta(2k+2) t^{2k+1} (-1)^k\right| \underset{k\to+\infty}{\sim} t^{2k+1}$.

Puisque la condition $|t| < 1$ assure la convergence de la série $\sum t^{2k+1}$, la série $\sum (-1)^k \zeta(2k+2) t^{2k+1}$ est absolument convergente donc convergente

D'après 1-3-5, $I(2k+2) = \Gamma(2k+2)\zeta(2k+2) = (2k+1)!\zeta(2k+2)$ donc

$$H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} I(2k+2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k+1} \zeta(2k+2)$$

et par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k+1} \zeta(2k+2) = \frac{\pi t.\coth(\pi t) - 1}{2t}.$$