Devoir surveillé V - PSI

9 janvier 2012

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 4 heures

EXERCICE

On considère dans cette question les deux fonctions G et H définies par :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt, \quad H(x) = \left(\int_0^x \exp(-u^2)\,du\right)^2.$$

1. Montrer que G est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Vous préciserez la dérivée de G à l'aide d'une intégrale.
2. Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Vous préciserez la dérivée de H.
3. En déduire que la fonction $G+H$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\frac{\pi}{4}$.
4. Montrer l'inégalité suivante pour tout réel x :
$$0 \leqslant G(x) = \exp(-x^2)\int_0^1 \frac{\exp(-x^2t^2)}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{\pi}{4}\exp(-x^2).$$
5. En déduire le comportement de $G(x)$, puis de $H(x)$, quand x tend vers $+\infty$,
6. Justifier l'existence de I définie par :
$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2)\,du.$$
puis déterminer sa valeur à l'aide de ce qui précède.

PROBLEME

Notations et Objectifs

Etant donnée un intervalle J d $\mathbb{R}$ et une fonction f à valeurs réelles, continue par morceaux et intégrable sur J, on note $\displaystyle\int_J f(x)\,dx$ l'intégrale de f sur J.

On désigne par :
- α un nombre réel ;
- φ_α la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi_\alpha(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$ lorsque $x > 0$ et $\varphi_\alpha(0) = 0$;
- h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{e^x - 1}$ lorsque $x \neq 0$ et $h(0,t) = t$;

On note :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{[0,+\infty[} \varphi_\alpha(x)\,dx \\ \Gamma(\alpha) &= \int_{[0,+\infty[} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx \\ H(t) &= \int_{[0,+\infty[} h(x,t)\,dx \end{aligned}$$

Lorsque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, on note $\displaystyle\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

L'objet du problème est une étude de la fonction H.

La première partie fournit l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide des fonctions Γ et ζ, dans la deuxième partie on étudie la fonction H.

Préliminaires

P-1 Préciser l'ensemble de définition $D(\zeta)$ de la fonction ζ.

P-2 Préciser l'ensemble $D(\Gamma)$ des réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\alpha-1}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$.

P-3 Etablir la relation $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in D(\Gamma)$.

P-4 En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

Soit $\Delta(\varphi)$ l'ensemble des nombres réels α pour lesquels la fonction φ_α est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

1-1 Montrer que l'ensemble $\Delta(\varphi) = [2,+\infty[$.

1-2 Montrer que φ_α est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $\alpha \in \Delta(\varphi)$.

1-3 On suppose que $\alpha \in \Delta(\varphi)$. Soit $u_n(x) = x^{\alpha-1}e^{-nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$.

1.3.1 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge pour tout $x \in [0,+\infty[$ et expliciter sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ en fonction de $\varphi_\alpha(x)$.

1-3-2 Montrer que la fonction u_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1-3-3 En utilisant le théorème de convergence dominé à la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, justifier avec soin l'égalité :

$$\int_{[0,+\infty[} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\, dx \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_{[0,+\infty[} u_n(x)\, dx \Big).$$

1-3-4 Exprimer $\int_{[0,+\infty[} u_n(x)\, dx$ à l'aide de n, α et de la fonction Γ.

1-3-5 En déduire que $I(\alpha) = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$.

On rappelle que la définiton de I est donnée au début de l'énoncé

1-3-6 Montrer que $\zeta(\alpha)$ admet une limite lorsque α tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite ?

1-3-7 En déduire un équivalent de $I(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et k tendant vers $+\infty$.

Partie II

2-1 Etude de la régularité de H.

2-1-1 Etudier la continuité des applications partielles $h(x, .)$ et $h(., t)$ pour tout t de $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$.

2-1-2 Montrer que la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

2-1-3 Montrer que la fonction H est continue sur $\mathbb{R}$.

2-1-4 Montrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée n-ième sous forme intégrale. *On pourra utiliser les fonctions φ_p pour $p \in \mathbb{N}$.*

2-2 Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = e^{-nx}\sin(\alpha x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On désigne par $D(g)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ soit convergente et on note : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ pour $x \in D(g)$.

2-2-1 Déterminer l'ensemble $D(g)$ lorsque $\alpha = 0$ et lorsque $\alpha \neq 0$.

2-2-2 Expliciter $g(x)$ pour $x \in D(g)$.

2-2-3 Montrer que la fonction g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2-2-4 On rappelle que $H(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}\, dx$. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| H(\alpha) - \sum_{p=1}^{n} \int_0^{+\infty} g_p(x)\, dx \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} |\sin(\alpha x)|\, dx.$$

En déduire ,avec soin l'égalité :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_{[0,+\infty[} g_n(x)\, dx \Big).$$

2-2-5 Calculer $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} g_n(x)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la valeur de $H(\alpha)$ sous la forme de la somme d'une série.

2-2-6 En admettant que pour tout u de $\mathbb{R}$,

$$\sin(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

justifier avec soin l'égalité, pour tout $t \in]-1,1[$

$$H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} I(2k+2).$$

2-2-7 En déduire que la série de fonction $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \zeta(2k+2) t^{2k+1}$ est convergente pour $t \in]-1,1[$ et en déduire sa somme en fonction de H.

Remarque : En fait, à l'aide des séries de fourier, on peut montrer que pour tout $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$H(t) = \frac{\pi t \coth(t\pi) - 1}{2\alpha}.$$

et donc conclure que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k t^{2k+1} \zeta(2k+2) = \frac{\pi t \coth(\pi t) - 1}{2t}.$$