Programme de colles n°17- Semaine du 30 janvier au 3 février

Les indications précédées du symbole ▶ sont les questions de cours. Les démonstrations, si il y a lieu, sont à connaitre.

Espace euclidiens - Endomorphismes orthogonaux

- **Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien**
  - Théorème de représentation de Riesz
  - ▶ Définition de l'adjoint
  - ▶ Matrice de l'adjoint dans une b.o.n.
  - ▶ Caractérisation des endomorphismes symétriques et antisymétriques à l'aide de l'adjoint.
  - ▶ Décomposition d'un élément de $\mathcal{L}(E)$ en la somme d'un endomorphisme symétrique et d'un endomorphisme antisymétrique.
  - ▶ Un projecteur de E est orthogonal ssi $p^* = p$.
  - Une symétrie de E est une symétrie orthogonale ssi $s^* = s$.
- **Endomorphismes orthogonaux**
  - ▶ Caractérisation par la conservation du produit scalaire, de la norme, d'une b.o.n. ou de toutes les b.o.n.
  - ▶ Les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes.
    On note $O(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) | f \text{ est orthogonal }\}$. $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé le **groupe orthogonal** de E.
  - Matrices orthogonales et caractérisation sur les vecteurs lignes ou colonnes.
    - ▶ Si Ω est une matrice orthogonale alors $\det(\Omega) = \pm 1$.
      Si $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $\det f = \pm 1$.
    - $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui s'appelle le *groupe orthogonal* et $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ qui s'appelle le *groupe spécial orthogonal*.
    - ▶ $\forall f \in \mathcal{O}(E)\ Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{1, -1\}$.
      $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})\ Sp_{\mathbb{R}}(\Omega) \subset \{1, -1\}$.
    - ▶ Les espaces propres E_1 et E_{-1} vérifient : $(E_1)^\perp$ et $(E_{-1})^\perp$ sont stables par f.
  - Exemple de la décomposition polaire.
- **Etude de $O_2(\mathbb{R})$**
  - Caractérisation des éléments de $SO_2(\mathbb{R})$.
    Toute rotation est composition de deux réflexions.
- **Etude de $O_3(\mathbb{R})$**
  - Caractérisation des éléments de $O_3(\mathbb{R})$ en fonction de $\dim(E_1)$.
    Exemples sur des matrices pour déterminer les éléments caractéristiques.
- **Endomorphismes symétriques de E euclidien**
  - Définition et caractérisaiton dans une b.o.n.
  - ▶ Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux.
  - ▶ Réduction des endomorphismes symétriques réelles. (La démonstration n'est pas exigible).

- **Définition**
  - ► Lemme d'Abel
  - Rayon de convergence : Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Alors il existe un unique élément R de $\overline{\mathbb{R}_+}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} |z| < R \Rightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \quad \text{converge absolument}\right) \\ |z| > R \Rightarrow ((a_n z^n)_n \quad \text{n'est pas bornée}) \end{cases}$$

    On définit alors le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ par :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ |\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée }\}.$$

    ► Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Pour tout $r < R$, il y a convergence normale de la série de fonction sur $D(0, r)$. Pour tout z tel que $|z| > R$, la série de fonction diverge grossièrement.
  - ► Comparaison des rayons de convergence lorsque $|a_n| \leqslant |b_n|$ avec démo.
  - Comparaison des rayons de convergence lorsque $|a_n| \sim |b_n|$ sans démo.
- **Opérations sur les séries entières**
  - Structure d'espace vectoriel
  - Dérivation des séries entières.
  - Produit de deux séries entières.
  - ► Régularité de la somme sur $]-R, R[$.
- **DSE des fonctions usuelles au voisinage de** 0