

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

Etudier la continuité de la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
2. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en $(0, 0)$, que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Soit $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < \max(1, y^2)\}$.
2. Soient $a \in [0, 1[$ et $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < a \max(1, y^2)\}$. Montrer l'existence et déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur D_a .

Exercice 4

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (xy^2, e^{x+y}, \arctan(xy))$.

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et déterminer sa matrice jacobienne.

Exercice 5

CCP 2007

On pose $f(x, y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

1. Montrer que le domaine de définition D de f est la réunion de trois ouverts de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D et exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Simplifier l'expression de f .

Exercice 6

Air 2005

Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (avec le changement de variable polaire) sur un ouvert U à déterminer qui vérifient :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = kf,$$

avec k appartenant à \mathbb{R} .

Exercice 7

Air 2008

Trouver toutes les fonctions f vérifiant :

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

avec U un ouvert de \mathbb{R}^2 à déterminer.

(On pourra poser $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer).

Exercice 8

On considère l'équation : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 3(x - y)f(x - y) = 0$. (1)

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, x + y)$. Montrer que φ induit un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > 0\}$ de \mathbb{R}^2 sur un ouvert V que l'on précisera.
2. En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant (1).

Exercice 9

Déterminer les extremums locaux de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 10

CCP 2008

Soit $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Pourquoi f admet-elle un minimum m et un maximum M sur D ?

Trouver m et M .

f admet-elle un extremum local sur \mathbb{R}^2 ?