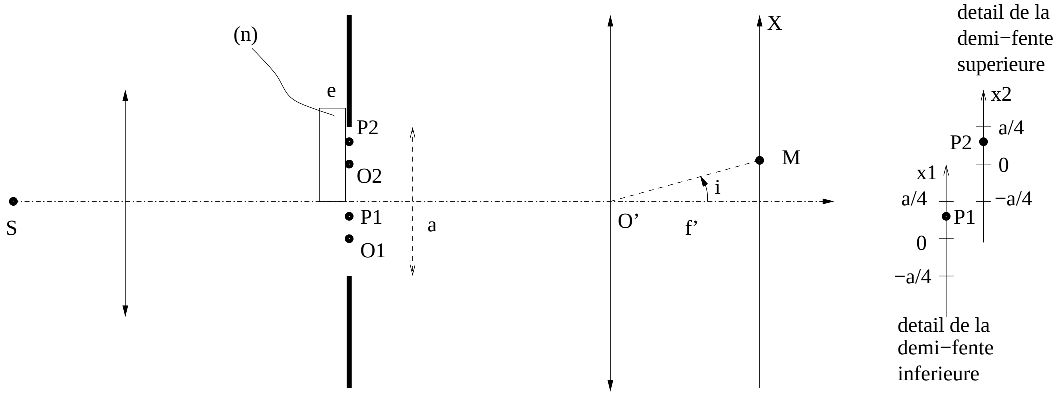
Devoir surveillé numéro 17

Optique physique : diffraction

PC, 28 mars 2009

Sur la moitié d'une pupille rectangulaire de longueur b et de largeur a, avec $a \ll b$, on place une lame de verre d'indice n et d'épaisseur e. On admet que cette lame n'induit aucune atténuation de l'éclairement, mais provoque évidemment un déphasage. On se place dans les conditions de Fraunhoffer, en lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ, et on cherche à déterminer la fonction d'onde résultante en M repéré par l'angle i (on est dans les conditions de Gauss) $\underline{a}(M,t)$ puis l'éclairement $\mathcal{E} = \underline{a} \cdot \underline{a}^*$. On note O_1 le centre et P_1 un point courant de la demi-fente inférieure, O_2 le centre et P_2 un point courant de la demi-fente supérieure. Les abcisses des points P_1 et P_2 sont respectivement x_1 et x_2 variant entre $-a/4$ et $a/4$.



1. Tracer soigneusement, sur l'énoncé ou sur votre copie, et avec des couleurs bien visibles, les rayons SO_1M, SO_2M, SP_1M et SP_2M.
2. On note $\underline{a}_P(M,t)$ la fonction d'onde du rayon arrivant en M à la date t et étant passé par P. Montrer que
$$\underline{a}_{O_2} = \underline{a}_{O_1} e^{-j\beta}, \quad \underline{a}_{P_1} = \underline{a}_{O_1} e^{-j\frac{2\pi x_1 \sin i}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \underline{a}_{P_2} = \underline{a}_{O_2} e^{-j\frac{2\pi x_2 \sin i}{\lambda}}$$
avec $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n-1)e + \frac{a}{2}\sin i\right]$.
3. Justifier en quelques mots clés que la fonction d'onde en M produite par la pupille élémentaire de largeur dx_1 (ou dx_2) autour de P_1 (ou P_2) s'écrit $d\underline{a}_{P_1} = \underline{a}_{P_1} b dx_1$ (ou $d\underline{a}_{P_2} = \underline{a}_{P_2} b dx_2$).
4. En déduire la fonction $\underline{a}(M,t)$ sous la forme de la somme de deux intégrales correspondant à chacune des deux demi-fentes.
5. En remarquant que x_1 et x_2 sont des variables muettes d'intégration, mettre en facteur une unique intégrale, et calculer complètement la fonction d'onde et l'éclairement $\mathcal{E}$ en fonction de i, de la surface totale de la pupille ab d'un sinus cardinal.
6. Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de X, abscisse de M sur l'écran.
7. Déterminer les abscisses des franges sombres de diffraction (annulation du sinus cardinal) et de celles d'interférences (annulation du terme assimilable à une formule de Fresnel).
8. Décrire la figure obtenue sur l'écran.