Feuille d'exercices numéro 1

Cinématique du solide

PC, 4 septembre 2007

Exercice 1 On donne les masses, vecteurs position et vitesse d'un système de quatre points :

$$M_1 : \quad m_1 = 1\text{kg} \; ; \; \overrightarrow{OM_1} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \; \overrightarrow{v}_1 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \qquad M_2 : \quad m_2 = 2\text{kg} \; ; \; \overrightarrow{OM_2} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \; \overrightarrow{v}_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$M_3 : \quad m_3 = 1\text{kg} \; ; \; \overrightarrow{OM_3} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \; \overrightarrow{v}_3 \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \qquad M_4 : \quad m_4 = 2\text{kg} \; ; \; \overrightarrow{OM_4} \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \; \overrightarrow{v}_4 \left| \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Déterminer les caractéristiques du centre d'inertie G. Déterminer les coordonnées des vecteurs position et vitesse dans le référentiel barycentrique. Déterminer la résultante cinétique, le moment cinétique et l'énergie cinétique du système dans le référentiel fixe et dans le référentiel barycentrique. Vérifier les théorèmes de Koenig.

Exercice 2 Une barque de masse m et de longueur L, de centre d'inertie I, est occupée par deux personnes de masses m_1 et m_2 en A et B, aux deux extrémités de la barque. Elles échangent leurs positions. La barque est initialement immobile et elle glisse sans frottement à la surface de l'eau. Déterminer la nouvelle position de I.

Exercice 3 Deux mobiles ponctuels M_1 et M_2 de même masse m sont reliés par un ressort vertical de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'axe vertical est noté (O, z), O est sur le sol et le référentiel terrestre est supposé galiléen. On tient le mobile M_1 à l'altitude initiale $h + \frac{\ell_0}{2} + \frac{mg}{2k}$, le mobile M_2 est alors en équilibre (on le vérifiera sans difficulté) sous le ressort vertical à l'altitude initiale $h - \frac{\ell_0}{2} - \frac{mg}{2k}$, et le centre d'inertie G, au milieu, est à l'altitude h. A la date $t = 0$, on lâche M_1 sans vitesse initiale. On pose $z_1 = z_G + e$ et $z_2 = z_G - e$. Déterminer l'équation horaire $z_G(t)$. Déterminer l'énergie cinétique du système des deux masses en utilisant le deuxième théorème de Kœnig, l'énergie mécanique généralisée en fonction de z_G et de e. En déduire l'équation différentielle vérifiée par e et les équations horaires $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

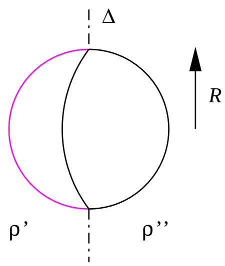
Exercice 4 Quatre protons de masse m et de charge e sont abandonnés sans vitesse initiale aux sommets d'un carré de côté a. Quelles seront leurs vitesses lorsque le carré aura doublé de côté ? On négligera tout effet gravitationnel.

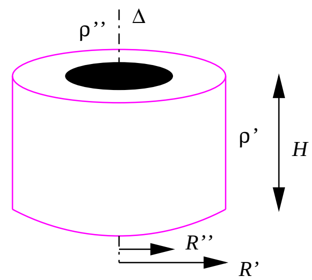
Exercice 5 Soit un cylindre d'axe Oz de rayon R et de hauteur H. Déterminer sa masse dans les cas suivants : (1) masse volumique uniforme ρ_0, (2) masse volumique $\rho(z) = \rho_0 \frac{z}{H}$, (3) masse volumique à symétrie radiale $\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{R}}$.

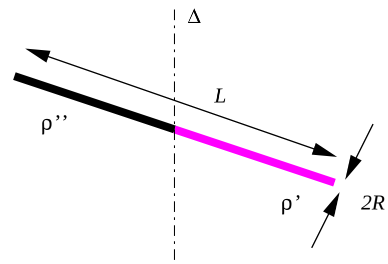
Exercice 6 Déterminer la position du centre d'inertie des cylindres de l'exercice précédent.

Exercice 7 Calculer la masse d'une boule de rayon R et de masse volumique à symétrie sphérique $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 8 On utilise deux matériaux différents de masses volumiques ρ' et ρ'' pour fabriquer les solides composites suivants : (1) une boule formée de deux demi-boules ; (2) une tige constituée de deux demi-tiges ; (3) un cylindre formé d'une âme cylindrique sertie dans une bague :







Déterminer dans chaque cas le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ.

Exercice 9 Un cylindre de rayon r et de masse M roule sans glisser sur un plan horizontal, G se déplaçant à vitesse constante v par rapport au plan. Établir les relations entre les grandeurs cinématiques. Déterminer les expressions de la résultante cinétique, du moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique, du moment cinétique au point de contact et de l'énergie cinétique de ce solide dans le référentiel lié au plan.

Exercice 10 On reprend le même exercice dans le cas du roulement sans glissement de ce cylindre dans le fond d'une vallée en forme de demi-cercle de rayon R. On choisit comme variable cinématique l'angle θ de rotation du cylindre. Déterminer les expressions de la résultante cinétique, du moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique, du moment cinétique au point de contact I et au centre du demi-cercle O et de l'énergie cinétique de ce solide dans le référentiel lié au plan.

Exercice 11 Lors d'un dérapage, la roue de rayon R d'une voiture tourne à la vitesse angulaire ω tandis que la voiture se déplace à la vitesse v par rapport au sol verglassé. On suppose que le vecteur vitesse de glissement est égal à l'opposé du vecteur vitesse de la voiture se déplaçant sur le sol horizontal. Établir la relation liant v, R et ω. Quelle sera l'indication du compteur de vitesse (tachymètre) ?

Exercice 12 On modélise une balle de fusil par un cylindre de masse M de rayon r surmonté d'une tête en forme de demi-boule de même rayon r et de même masse M. Pour stabiliser la balle, on lui imprime au moment de son éjection un mouvement de rotation grâce à des stries hélicoïdales : on définit le pas de vis par le paramètre p exprimé en mètre par tour : à chaque fois que la balle fait un tour, elle progresse de p mètres dans le canon. À la sortie du canon, la vitesse de G est $v\overrightarrow{u}_x$. Déterminer l'énergie cinétique totale de la balle dans le référentiel du canon.

Exercice 13 Deux rails fins parallèles sont distants de $2d$. Une boule de rayon R roule sans glisser entre eux et se déplace ainsi à la vitesse v. Déterminer l'énergie cinétique de la boule.

Exercice 14 Un cube de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha < \frac{\pi}{4}$ par rapport à l'horizontale. À quelle condition peut-il rester immobile sans glisser ?

Exercice 15 Une boule de rayon R et de masse M roule sans glisser à la vitesse $\overrightarrow{v}$ du haut vers le bas sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Déterminer l'énergie cinétique de la boule dans le référentiel galiléen du sol. On note $f = f_s = f_d$ le coefficient de frottement au point I de contact de la boule et du plan. Déterminer les caractéristiques des forces extérieures et de leurs moments en G et en I. Même question si la vitesse de glissement en I est $\overrightarrow{v}_g = -\overrightarrow{v}$.

Exercice 16 Un petit cube de masse m est posé sur le dessus d'un chariot parallélépipédique de masse M qui glisse sans frottement sur une table horizontale. Le chariot est relié à une paroi par un ressort de constante de raideur k et de masse négligeable, et il a un mouvement rectiligne. Déterminer l'amplitude maximale du mouvement en dessous de laquelle le cube ne glisse pas ; on notera f le coefficient de frottement entre le cube et le chariot.