Feuille d'exercices numéro 5

PC

10.10.2007

Exercice 1 Tuyères

1. On assimile une tuyère à une canalisation possédant une symétrie de révolution autour de l'axe (O, z), dont le rayon varie selon la loi $r = r_0\left(1 + \frac{z}{L}\right)$, avec $L \gg r_0$. Un fluide incompressible circule dans cette tuyère avec un débit massique constant D_m. On suppose que le champ des vitesses est uniforme et pratiquement longitudinal sur toute section droite de la tuyère : $\overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{v}(z) = v(z)\overrightarrow{u}_z$. Déterminer la topographie du champ des vitesses, les accélérations particulaire, localez et convective, et préciser la ou les catégories au(x)quelle(s) appartient cet écoulement.
2. Dans la tuyère décrite à la question précédente, on ne suppose plus que $L \gg r_0$. Un fluide incompressible de masse volumique μ circule dans cette tuyère avec un débit massique constant D_m. On suppose que le champ des vitesses est uniforme et du type $\overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{v}(z) = v_z(z)\overrightarrow{u}_z + v_z(z)\frac{r}{z+L}\overrightarrow{u}_r$. Déterminer l'expression de $v_z(z)$ compatible avec les hypothèses et dresser la cartographie du champ des vitesses ; préciser la ou les catégories au(x)quelle(s) appartient cet écoulement.
3. Une tuyère déformable possédant une symétrie de révolution autour de l'axe (O, z) a une section qui dépend de z et de t : $S(z, t)$ (c'est par exemple le cas pour un tube de dentifrice sur lequel on appuie). Un fluide y circule et on admet pour simplifier que le champ des vitesses est uniforme et pratiquement longitudinal sur toute section droite de la tuyère : $\overrightarrow{v}(M, t) = \overrightarrow{v}(z, t) = v(z, t)\overrightarrow{u}_z$. Établir l'équation aux dérivées partielles reliant les trois variables :
$$\frac{\partial \mu S}{\partial t} + \frac{\partial \mu v S}{\partial z} = 0$$
On pourra faire un bilan sur la tranche de fluide entre z et $z + dz$ entre t et $t + dt$.

Exercice 2 Un fluide incompressible circule dans une canalisation horizontale, cylindrique d'axe (O, z) et de section S. Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. Les champs eulériens sont supposés uniformes sur toute section droite de l'écoulement. Établir la relation liant le champ des pressions et celui des vitesses.

Exercice 3 Dans l'exercice précédent, on suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire M et que l'écoulement est isotherme à la température T. Déterminer complètement l'expression de $v(z)$ en posant $P(0) = P_0$.

Exercice 4 Un gaz parfait circule de bas en haut d'une canalisation cylindrique d'axe (O, z) et de section S. Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. Les champs eulériens sont supposés uniformes sur toute section droite de l'écoulement. Déterminer $v(z)$ en écoulement isotherme à la température $T = T_0$; donner dans ce cas l'allure du profil des vitesses en fonction de z. Déterminer de même la relation entre $v(z)$ et z dans le cas d'un écoulement adiabatique réversible (on notera $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$).

Exercice 5 Un fluide incompressible circule dans une canalisation horizontale, cylindrique d'axe (O, z) et de section S. Le débit massique D_m varie lentement selon la loi $D_m = D_0\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$. Les champs eulériens sont supposés uniformes sur toute section droite de l'écoulement. On pose $P(0) = P_0$ et $v(-0, t) = v_0$. Établir la relation liant le champ des pressions et celui des vitesses en justifiant les approximations effectuées.

Exercice 6 Un verre cylindrique de rayon R et de hauteur H est rempli à moitié d'eau. Il est posé au centre d'un plateau horizontal tournant à vitesse angulaire constante et faible ω. Au bout de quelques instants, la surface libre de l'eau dans le verre prend une forme stable. En écrivant l'équilibre des particules de fluide dans le référentiel non galiléen en rotation, déterminer la nature et l'équation du profil de cette forme, et le champ des pressions en notant P_0 la pression atmosphérique.

Exercice 7 Une zone dépressionnaire a la forme d'un disque de rayon $R = 1000\text{km}$ à la surface du sol de la Terre (dont on néglige la rotondité sur ce disque) centré en un point de latitude $\lambda = \frac{\pi}{4}$. On suppose que la pression évolue de façon affine le long d'un rayon du disque, de $P_0 - \delta P = 99\ 300\text{Pa}$ au centre à $P_0 = 101300\text{Pa}$ à la périphérie. L'air est assimilé à un fluide incompressible de masse volumique $\mu = 1,30\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, on donne $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et la période de révolution de la Terre dans le référentiel géocentrique $T_0 = 86164\text{s}$ (jour sidéral). On n'étudie que les vents horizontaux dans le disque ; déterminer le champ des vitesses en régime stationnaire.

Exercice 8 **Écoulemnt de Couette plan**. On considère l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux entre deux plaques planes horizontales infinies. La première plaque ($z = 0$) est immobile, la seconde ($z = L$) est animée d'une translation horizontale à la vitesse constante $\overrightarrow{U} = U\overrightarrow{u}_x$. En régime permanent, on note $p(z)$ le champ des pressions et $\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{u}_x$ le champ des vitesses dans le fluide.

1. En utilisant l'équation de Navier-Stokes, déterminer $v(z)$.
2. En déduire la composante horizontale de la force exercée par le fluide sur une surface S de la plaque mobile.
3. Quelle application de ce phénomène connaissez-vous ?

Exercice 9 **Écoulement de Poiseuille cylindrique**. La circulation sanguine dans une artère est modélisée par un écoulement incompressible et permanent d'un fluide visqueux (μ et ν) dans une conduite cylindrique d'axe (O, z), de longueur L et de rayon R. En raison des symétries du problème, on cherche en coorodonnées cylindriques un champ de vitesses et un champ de pressions de la formpe :

$$\overrightarrow{v}(M) = v(r,z)\overrightarrow{u}_z \quad \text{et} \quad p(M) = p(r,z)$$

On donne pour ce champ

$$\text{div}\ \overrightarrow{v} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{et} \quad \Delta\overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\overrightarrow{u}_z$$

1. Montrer que la vitesse ne dépend pas de z.
2. On néglige les effets de la pesanteur, l'équation de Navier Stokes s'écrit alors

$$\mu\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

   (a) Montrer que le champ des accélérations est nul.
   (b) Montrer que la pression ne dépend pas de r.
   (c) Montrer que $\frac{dp}{dz}$ est une constante C.
   (d) On note $p(z = 0) = p_1$ et $p(z = L) = p_2$ les pressions aux extrémités de la conduite. Donner l'expression de C en fonction de p_1, p_2 et L.
   (e) Donner l'expression du champ des vitesses en fonction de C, η et r.
   (f) Donner l'expression du débit volumique D en fonction de p_1, p_2, L, η et R.
3. Chez un adulte, le débit volumique moyen dans l'aorte ($R = 0,5\text{cm}$ et $L = 1\text{m}$) est $D = 80\text{cm}^3\cdot\text{s}^{-1}$. Sachant que la viscosité du sang est $\eta = 4\cdot 10^{-3}P\ell$, calculer la chute de pression $p_1 - p_2$ dans l'aorte. Comparer à la différence de pression maintenue par le cœur, de l'ordre de 10 500Pa.