

Feuille d'exercices numéro 7

PC

08.11.2007

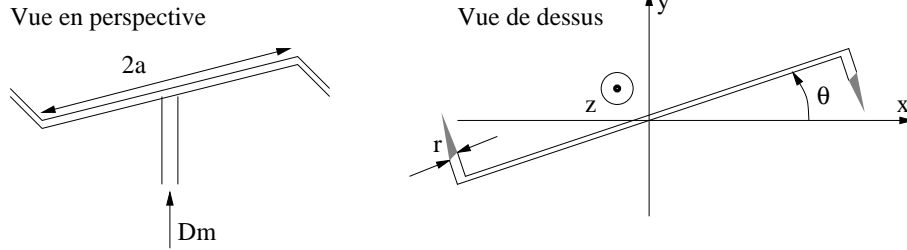
Exercice 1 Un fluide incompressible de masse volumique μ circule dans une canalisation horizontale de section uniforme S et coudée d'un angle α . Le débit massique D_m est constant et on se place en régime permanent. Les pressions à l'entrée et à la sortie sont égales à P_0 . Déterminer la résultante des forces exercées par le fluide sur la canalisation (on néglige l'influence du poids).

Exercice 2 Un gaz parfait de masse molaire M circule dans une canalisation cylindrique horizontale dont le rayon varie brutalement de r_e (entrée) à r_s (sortie). Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. La pression à l'entrée est P_e , à la sortie P_s . L'écoulement est isotherme à la température T . Déterminer la résultante des forces exercées par le fluide sur la canalisation (on néglige l'influence du poids).

Exercice 3 Un gaz parfait de masse molaire M circule dans une canalisation cylindrique de section S . Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. La pression à l'entrée est aP_0 , à la sortie P_0 . La température d'injection est T_e .

1. Déterminer la masse volumique μ_e et la vitesse d'injection \vec{v}_e du gaz à l'entrée.
2. Par un bilan de quantité de mouvement, établir l'expression de la vitesse de sortie \vec{v}_s . En déduire T_s et μ_s .
3. Par un bilan d'énergie totale, en déduire la quantité de chaleur reçue par le fluide par unité de temps (c'est une puissance thermique). On note $C_{V,m}$ la capacité calorifique molaire supposée indépendante de la température.

Exercice 4 Le dispositif décrit ci-dessous est un tourniquet hydraulique. Un fluide incompressible de masse volumique μ est injecté dans le tuyau vertical avec un débit massique constant D_m . On note r le rayon des buses de sortie. On repère la rotation de la tige par l'angle θ . La pression extérieure est P_0 .



En régime permanent, $\omega = \dot{\theta}$ est constante sous l'action de l'éjection de l'eau et d'un couple de frottement fluide linéaire $\vec{\Gamma} = -\alpha\omega \vec{u}_z$. On cherche à déterminer ω .

1. Par composition des vitesses, montrer que la vitesse d'éjection du fluide par la buse de droite est, dans le référentiel galiléen du sol

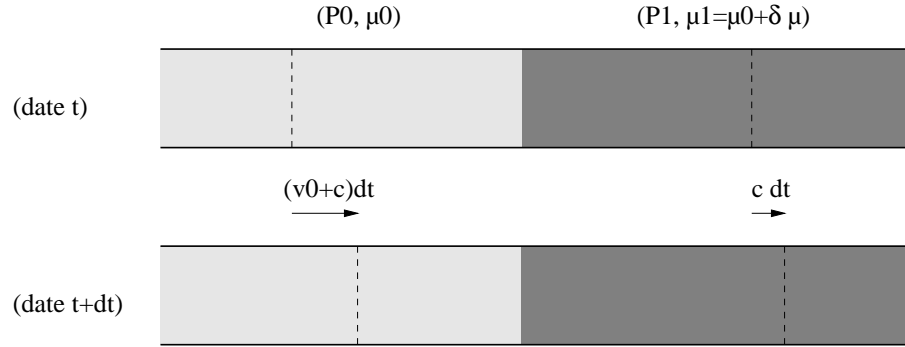
$$\vec{v}_D = \left(a\dot{\theta} - \frac{D_m}{2\mu\pi r^2} \right) \vec{u}_\theta$$

2. Par application du théorème du moment cinétique en O , en déduire l'expression du moment en O des forces exercées par la canalisation sur le fluide situé dans la tige.
3. En déduire ω .

Exercice 5 Un fluide parfait compressible est initialement en écoulement incompressible uniforme et stationnaire (masse volumique μ_0 , vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$) dans une canalisation horizontale cylindrique infinie, de section S . À la date $t = 0$, on ferme brutalement l'extrémité de la canalisation en $x = 0$ et on étudie le régime transitoire de l'écoulement pour $x < 0$. On étudie un modèle simple dans lequel le fluide est séparé en deux par une surface fictive d'abscisse ξ qui se déplace à vitesse constante $\vec{c} = -c \vec{u}_x$ (c est appelée la célérité de l'onde de choc) avec $c \gg v_0$. À tout instant :

- à gauche de la surface fictive, pour $x \leq \xi$, le fluide se déplace encore à la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0$ et $\mu = \mu_0$, on note P_0 la pression et s_0 l'entropie massique; la perturbation n'est pas encore arrivée;
- à droite de la surface fictive, pour $\xi < x \leq 0$, le fluide s'est immobilisé $\vec{v} = \vec{0}$ et on pose $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ avec $\delta\mu \ll \mu_0$, on note P_1 la pression et s_1 l'entropie massique.

1. Faire un schéma dans le référentiel galiléen du laboratoire, \mathcal{R}_0 , faisant apparaître la surface fictive et les différentes vitesses de déplacement.
2. On note \mathcal{R}^* le référentiel en translation uniforme par rapport à \mathcal{R}_0 dans lequel la surface fictive est immobile. On travaille sur un système fermé de fluide se répartissant de part et d'autre de la surface. On donne les schémas à la date t et à la date $t + dt$ dans \mathcal{R}^* :



Préciser les vitesses des deux surfaces délimitant le système (indiquées en pointillés sur le schéma) dans \mathcal{R}^* . En déduire les deux distances d'avancement $(v_0 + c)dt$ et cdt indiquées sur le schéma.

3. Par un bilan de masse, justifier l'équation

$$(i) \mu_0 v_0 = c \delta\mu$$

4. Par un bilan de quantité de mouvement, justifier l'équation

$$(ii) (\mu_0 + \delta\mu)c^2 - \mu_0(v_0 + c)^2 = P_0 - P_1$$

5. Par un bilan d'entropie, justifier l'équation

$$(\mu_0 + \delta\mu)S c dt s_1 - \mu_0 S (v_0 + c) dt s_0 = 0$$

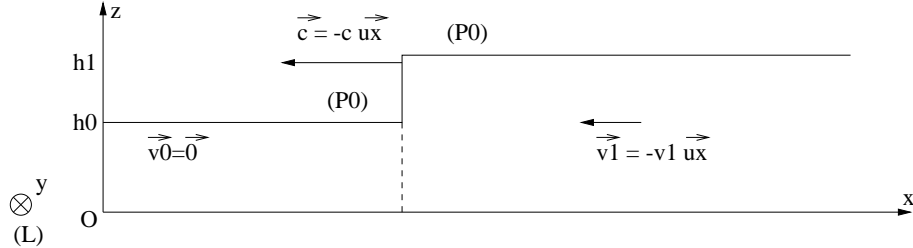
En déduire que l'écoulement est isentropique.

6. On note $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$ le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé constant et uniforme. En intégrant et en effectuant un développement limité, justifier l'équation

$$(iii) \delta\mu = \mu_0 \chi_S (P_1 - P_0)$$

7. En déduire l'expression de c en fonction de μ_0 et χ_S .
8. Combien vaut c dans le cas d'un gaz parfait diatomique ($\gamma \simeq \frac{7}{5}$) de masse molaire $M = 29 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ à la température $T = 300 \text{K}$?

Exercice 6 Cet exercice est donné sans indication de résolution, mais en s'inspirant de la méthode de résolution de l'exercice précédent, on pourra trouver les différents bilans à écrire pour établir les équations. Un **mascaret** est une vague séparant deux niveaux d'eau dans un canal. Les notations sont celles du schéma suivant, où l'eau dans le canal a un niveau h_0 à gauche du mascaret où l'eau est immobile ($v_0 = 0$) et un niveau h_1 à droite où l'eau a une vitesse $\vec{v}_1 = -v_1 \vec{u}_x$. On note $\vec{c} = -c \vec{u}_x$ la célérité du mascaret (qui va de droite à gauche). La masse volumique de l'eau (incompressible) est μ , la largeur du canal est L (selon \vec{u}_y).



Après avoir défini un système s'étendant de part et d'autre du mascaret, dans un référentiel convenablement choisi, on fera un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement. Pour le calcul des forces de pression, on appliquera la loi de l'hydrostatique et on intégrera PdS sur la paroi. Établir la relation entre h_0 , h_1 , c et v_1 , puis l'expression de c en fonction de g , h_0 , h_1 , P_0 et μ .

Exercice 7 Une tuyère est formée d'une canalisation horizontale à symétrie de révolution autour de l'axe (O, x) , dont la section varie selon la loi $S(x)$. On note P_0 la pression à l'entrée de la tuyère en $x = 0$, le fluide qui s'y écoule est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et de rapport de capacités calorifiques noté γ ; on note μ_0 sa masse volumique à l'entrée. L'écoulement est supposé isentropique (donc non visqueux).

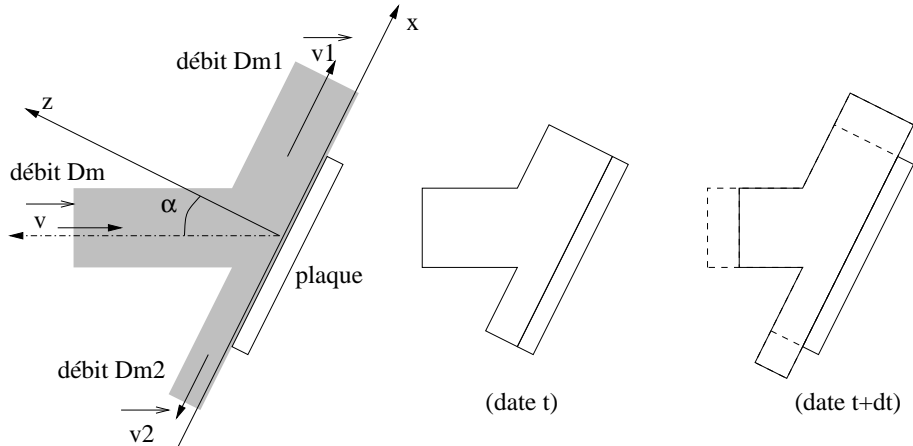
1. Établir la loi reliant P , μ , P_0 , μ_0 et γ .
2. Établir l'expression de v en fonction de la pression P .
3. Établir l'expression du débit massique en fonction de la section S et de la pression P .
4. On pose $u = \frac{P}{P_0}$. Montrer qu'on peut écrire le débit massique sous la forme

$$D_m = C u^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - u^{1 - \frac{1}{\gamma}}}$$

Donner l'expression de la pression de sortie qui rend le débit maximum.

5. Déterminer la vitesse de sortie correspondante. La comparer avec celle obtenue à l'exercice précédent.

Exercice 8 Un jet d'eau (fluide supposé parfait et incompressible) de débit D_m , horizontal est envoyé sur une plaque plane. On négligera l'influence de la pesanteur. Les notations sont celles du schéma suivant.



On se place en régime permanent. On note \vec{F} la force qu'il faut exercer sur la plaque (en plus des forces de pression) pour la maintenir en équilibre.

1. Montrer que $v_1 = v_2 = v$.
2. On travaille sur le système fermé formé de la plaque et de la portion de fluide délimitée par trois sections dessinée sur le schéma.
 - (a) Justifier que la somme des forces de pression est nulle.
 - (b) Justifier que la force \vec{F} est selon \vec{u}_z .
 - (c) Par un bilan de quantité de mouvement, exprimer \vec{F} et indiquer les expressions de D_{m_1} et D_{m_2} en fonction de D_m , v et α .