

# Feuille d'exercices numéro 8

PC

13.11.2007

**Exercice 1** Une distribution cylindrique de charges et de courants est définie par

$$\rho(r, t) = \rho_0 \frac{t}{\tau} \frac{r_0}{r} \quad \text{et} \quad \vec{j} = -j_0 \vec{u}_r$$

Déterminer complètement le champ électromagnétique associé sous la forme

$$(\vec{E}(r, t) = E(r, t) \vec{u}_r, \vec{B}(r, t) = \vec{0})$$

**Exercice 2** Vérifier la validité des équations de Maxwell intégrales pour la distribution et les champs de l'exercice précédent.

**Exercice 3** Lors de la charge d'un condensateur formé de deux disques parallèles, de rayon  $R$ , d'axe  $(O, z)$  et distants de  $d \ll R$ , la densité surfacique sur la plaque positive varie dans le temps selon la loi  $\sigma = \sigma(t)$ . Déterminer le champ électromagnétique entre les plaques en l'absence de toute autre charge ou courant (on néglige les effets de bord).

**Exercice 4** Lors de l'établissement du courant dans un solénoïde comportant  $N$  spires, de longueur  $d$ , de rayon  $R$ , d'axe  $(O, z)$ , l'intensité du courant varie selon la loi  $i = i(t)$ . Le champ magnétique est supposé uniforme à l'intérieur  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$  avec  $n = \frac{N}{d}$  (nombre de spires par mètre), nul à l'extérieur, et le champ électrique  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$  (c'est une conséquence des symétries du problème). Déterminer l'expression de  $E(r)$  (on néglige les effets de bord).

**Exercice 5** Un condensateur sphérique est formé de deux sphères concentriques, de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , portant les charges respectives  $q$  et  $-q$ . Déterminer les densités surfaciques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Le champ électrique est nul pour  $r < r_1$  et  $r > r_2$ , et radial pour  $r_1 < r < r_2$ . Déterminer sans calcul les expressions du champ électrique en  $r_1^+$  et en  $r_2^-$ . En déduire  $\vec{E}(r)$ ,  $V(r)$  et la capacité  $C$  du condensateur.

**Exercice 6** Le champ magnétique créé par un solénoïde infini, portant  $n$  spires par mètre, parcouru par un courant d'intensité  $i$ , est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur. Déterminer ses caractéristiques.

**Exercice 7 Diode à vide.** Dans une ampoule où règne un vide poussé, un fil rectiligne axial et une plaque cylindrique de hauteur  $h$ , de rayon  $R$ , sont portés aux potentiels 0 (cathode) et  $V_0$  (anode). La cathode, chauffée, émet par effet thermoélectronique des électrons de façon radiale avec une très faible vitesse. En régime permanent, on note  $i$  l'intensité du courant circulant dans les fils d'alimentation entrant dans l'anode et sortant de la cathode,  $V(r)$ ,  $\rho(r)$  et  $\vec{v}(r) = v(r) \vec{u}_r$ , les champs de potentiel, charge volumique et vitesse entre les deux plaques. Établir les trois relations liant  $V(r)$ ,  $\rho(r)$  et  $v(r)$ . En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $V(r)$  et la résoudre en cherchant une solution du type  $V(r) = K r^\alpha$ . En déduire l'équation et la forme de la caractéristique du dipôle et conclure.

**Exercice 8** En écrivant que  $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$  est l'énergie volumique emmagasinée par un solénoïde en régime permanent, donner l'expression de l'inductance  $L$  d'un solénoïde de rayon  $R$  et de longueur  $d$ .

**Exercice 9** Un plan infini  $(O, x, y)$  porte une densité surfacique de charges  $\sigma$  uniforme. Il est animé d'un mouvement de translation uniforme à la vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}_y$ . Déterminer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et le vecteur de Poynting en tout point de l'espace de cote  $z$  non nulle. Vérifier l'équation locale de Poynting.

**Exercice 10** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting entre les électrodes du condensateur décrit à l'exercice 3. Écrire l'équation locale de Poynting et en déduire que  $\sigma'(t) = cste$ . Indiquer comment on peut assurer cette propriété dans le montage électrique.

**Exercice 11** Déterminer l'expression du vecteur de Poynting à l'intérieur du solénoïde décrit à l'exercice 4. Écrire l'équation locale de Poynting et en déduire que  $i'(t) = cste$ . Indiquer comment on peut assurer cette propriété dans le montage électrique.

**Exercice 12** Un cylindre infini de rayon  $R$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$ , la densité volumique de courant  $\vec{j}(r, t) = j \vec{u}_z$  est supposée uniforme. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(r)$ .

**Exercice 13** Établir l'équation de Poisson vérifiée par  $V$  en régime stationnaire. Montrer de même que si on impose  $\text{div } \vec{A} = 0$ ,  $\vec{A}$  vérifie l'équation de Poisson vectorielle  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ .

**Exercice 14** Rappeler et démontrer l'approximation faite dans les équations de Maxwell sous l'approximation des régimes quasi stationnaires. Démontrer qu'alors  $\text{div } \vec{j} = 0$ .

**Exercice 15** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\rho$  dans un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ . Justifier que  $\rho \simeq 0$  et reformuler les équations de Maxwell dans ce cas.

**Exercice 16 Effet de peau dans un conducteur ohmique.** Le métal conducteur est caractérisé par sa résistivité  $\rho_s$  ou sa conductivité  $\gamma = \frac{1}{\rho_s}$ ; la loi d'Ohm locale s'écrit  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\rho$  dans un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$ .
2. Justifier que  $\rho \simeq 0$  et reformuler les équations de Maxwell dans ce cas.
3. En déduire que le champ électrique vérifie une équation aux dérivées partielles de diffusion :

$$\Delta \vec{E} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Résoudre cette équation différentielle en régime sinusoïdal forcé dans le cas d'une géométrie simple : le demi-espace  $x < 0$  est vide, le conducteur ohmique occupe le demi-espace  $x > 0$  et on cherche un champ électrique sous la forme

$$\vec{E} = E(x, t) E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) \vec{u}_y$$

Déterminer  $\delta$  et interpréter physiquement.

**Exercice 17 Bilan énergétique de la charge d'un condensateur.** Le condensateur décrit dans les exercices 3 et 10 est alimenté par un générateur de courant d'intensité  $I_0$ . Faire le bilan énergétique de la charge de ce condensateur sur une durée  $t$  en calculant en particulier le flux du vecteur de Poynting à travers l'enveloppe cylindrique délimitée par les deux plaques.

**Exercice 18 Bilan énergétique de l'établissement du courant dans un solénoïde.** Le solénoïde décrit dans les exercices 4 et 11 est alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice  $e$ . Faire le bilan énergétique de l'établissement du courant dans ce solénoïde sur une durée  $t$  en calculant en particulier le flux du vecteur de Poynting à travers l'enveloppe cylindrique délimitée par le corps de la bobine.

**Exercice 19 Étude énergétique de la loi d'Ohm.** Un fil conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  a la forme d'un cylindre infini d'axe  $(O, z)$ , de rayon  $r_0$ . Il règne dans tout l'espace un champ électrique  $\vec{E} = E \vec{u}_z$ . Donner l'expression de la densité de courant dans le fil, celle du champ magnétique et celle du vecteur de Poynting en fonction de  $r$ . Calculer le flux de  $\vec{\Pi}$  à travers un cylindre d'axe  $(O, z)$ , de rayon  $r > r_0$  et de hauteur  $h$ . Conclure.

**Exercice 20** Un solénoïde cylindrique d'axe  $(O, z)$  de rayon  $r_0$  comportant  $n$  spires par mètre est parcouru par un courant variable dont l'intensité est  $i(t) = I \cos(\omega t)$ . On admet que le champ magnétique propre créé par le solénoïde est uniforme à l'intérieur ( $r < r_0$ ) et que le champ électrique est orthoradial :

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

1. Déterminer le champ  $\vec{E}$  à l'intérieur du solénoïde.
2. On place un cylindre massif long de conductivité  $\gamma$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $r_1 < r_0$  à l'intérieur du solénoïde et de même axe. Déterminer la densité de courant  $\vec{j}$  créée par le champ électrique  $\vec{E}$ . Quel est l'effet observable associé à ces courants ?
3. En déduire le champ magnétique  $\vec{B}_i$  (appelé induit) créé sur l'axe par les courants et donner la condition sous laquelle ce champ est négligeable devant celui créé par le solénoïde.
4. Si cette condition n'est pas vérifiée, indiquer sans justification la répartition des courants dans le cylindre.