

# Feuille d'exercices numéro 9

PC

15 novembre 2007

## Exercice 1 Condensateur sphérique

Coordonnées du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Valeurs numériques :  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$  ; charge de l'électron :  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$  ; masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ .

1. **Préliminaire.** Soit une sphère (creuse) de centre  $O$ , de rayon  $R$ , portant une charge de densité surfacique  $\sigma$  (en coulomb par mètre carré). Soit  $M$  un point de l'espace repéré par le vecteur  $\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{u}_r$ .

(a) Montrer que le champ électrique en  $M$  s'écrit  $\overrightarrow{E} = E(r) \overrightarrow{u}_r$ .

(b) Établir l'expression de  $\overrightarrow{E}$  pour  $r > R$ .

(c) Établir l'expression de  $\overrightarrow{E}$  pour  $r < R$ .

(d) Vérifier que la discontinuité du champ à la traversée de la sphère est  $\overrightarrow{E}(R^+) - \overrightarrow{E}(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{u}_r$ .

2. **Capacité du condensateur sphérique.** Un condensateur sphérique est constitué de deux sphères de même centre  $O$ , de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , avec  $R_1 < R_2$ , et portant les charges respectives  $-q$  et  $+q$ . La sphère "négative" (de rayon  $R_1$ , portant la charge  $-q$ ) est reliée à la masse ( $V_N = V(R_1) = 0$ ).

(a) Donner l'expression des densités surfaciques de charge des deux sphères, respectivement  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en fonction de  $q$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

(b) En utilisant les résultats du préliminaire, établir l'expression du champ électrique en  $M$  situé entre les deux sphères, quand  $R_1 < r < R_2$ .

(c) En déduire que le potentiel électrique s'écrit

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(d) En déduire le potentiel de la plaque "positive",  $V_P = V(R_2)$ , et la différence de potentiel  $U_{PN} = V_P - V_N$  entre les deux plaques.

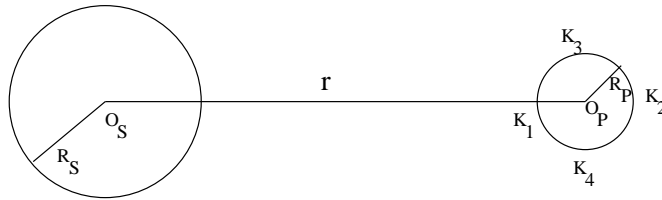
(e) En déduire la capacité du condensateur en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Faire l'application numérique avec  $R_1 = 10,00 \text{cm}$ ,  $R_2 = 10,01 \text{cm}$ .

## Exercice 2 Les forces de marée.

1. Établir, en appliquant le théorème de Gauss gravitationnel, l'expression du champ de gravitation  $\overrightarrow{g}$  créé par une planète sphérique de masse totale  $M$ , de centre  $O$  et de rayon  $R$ , en un point  $A$  tel que  $OA \geq R$ . En déduire l'expression de la force de gravitation  $\overrightarrow{F}$  subie par un corps ponctuel de masse  $m$  placé en  $A$ .

2. Un astre sphérique  $S$  de masse  $M_S$ , de centre  $O_S$  et de rayon  $R_S$  est fixe dans son propre référentiel astro-centrique  $\mathcal{R}_S$  supposé galiléen. Une planète sphérique  $P$  de masse  $M_P$ , de centre  $O_P$  et de rayon  $R_P$  est satellisée autour de l'astre, en orbite circulaire de rayon  $r = O_S O_P$ . Pour fixer les idées, on pourra penser au système {Soleil, Terre} ou au système {Terre, Lune}. Le référentiel astro-planète  $\mathcal{R}_{ap}$  (hélio-terrestre ou terro-lunaire) est le référentiel suiveur du mouvement de rotation de la planète vu depuis le centre de l'astre : il a pour point fixe le point  $O_S$  et est en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante  $\omega$ , vitesse de rotation de la planète autour de l'astre.
- (a) Faire un schéma du dispositif.
- (b) En écrivant l'équilibre de la planète dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}_{ap}$ , établir la relation entre  $\omega$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $M_S$  et  $r$ .
3. On considère un mobile  $K$  de masse  $m$ , immobile à la surface de la planète. On distingue quatre cas : En  $K_1$ ,  $K$  est aligné avec  $[O_S, O_P]$ , du côté de l'astre (il est "midi"). En  $K_2$ ,  $K$  est aligné avec  $[O_S, O_P]$ , du côté opposé à l'astre (il est "minuit"). En  $K_3$  et en  $K_4$ , le triangle  $(O_S, O_P, K)$  est isocèle en  $O_S$ . Les quatre points sont donc à la distance égale  $R_P$  du centre de la planète  $O_P$  mais leurs distances au centre de l'astre sont variables :

$$O_S K_1 < O_S K_3 = O_S O_P = r = O_S K_4 < O_S K_2$$



Dans le référentiel  $\mathcal{R}_{ap}$ ,  $K$  subit donc, outre les éventuelles forces de contact, les trois forces suivantes : force d'attraction gravitationnelle  $\vec{f}_P$  de la part de la planète, force d'attraction gravitationnelle  $\vec{f}_A$  de la part de l'astre, la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{ie}$  axifuge (la force d'inertie de Coriolis est nulle car  $K$  est immobile).

- (a) Montrer qu'en  $K_3$  et en  $K_4$ ,  $\vec{f}_A$  et  $\vec{f}_{ie}$  s'annulent.
- (b) Déterminer en  $K_1$  laquelle des deux forces a la plus grande norme ; faire de même en  $K_2$ .
- (c) En déduire pourquoi la forme des océans éventuels à la surface de la planète est la suivante :



- (d) Quel est le phénomène mis ainsi en évidence ? Pourquoi semble-t-il responsable de la destruction d'un satellite qui se trouverait trop proche de l'astre (et dont les débris ont pu donner les anneaux de Saturne) ? Pourquoi la Lune a-t-elle une face cachée ?
- (e) Donner un ordre de grandeur de la force de marée en  $K_1$  (faire un développement limité en supposant  $r \gg R_P$ ).

**Exercice 3 Champ créé par une nébuleuse.** Une nébuleuse a une forme de symétrie sphérique de centre  $O$  et s'étend de  $r = 0$  à  $r = R$  avec une masse volumique de type agrégative exponentielle :

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{R}}$$

1. Donner l'allure de la répartition des masses.
2. Calculer la masse totale de la nébuleuse. On pourra intégrer sur des couches concentriques entre  $r$  et  $r + dr$  de masse volumique uniforme  $\rho(r)$  et de volume  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ .
3. Donner l'expression du champ de gravitation  $\vec{g}(r_0)$  en un point  $P$  situé à la distance  $OP = r_0$  du centre de la nébuleuse. On distinguera deux cas :  $r < r_0$  et  $r \geq r_0$ .
4. Expliquer comment les forces de gravitation pourront faire évoluer la répartition des masses et conduire à la formation puis à l'"allumage" d'une étoile (Orion est considérée comme une "pouponnière d'étoiles").

**Exercice 4 Modèle de l'électron élastiquement lié.** On assimile l'atome hydrogénoïde à un proton ponctuel et à un électron délocalisé ayant la forme d'un nuage sphérique de rayon  $R$  et de densité de charge uniforme  $\rho$ . Sous l'action d'un champ électrique uniforme extérieur  $\vec{E}$ , le proton se déplace dans le nuage électronique : on note  $N$  le centre du nuage et  $P$  la position du proton ponctuel. On note  $x$  la distance de  $N$  à  $P$  et on suppose que  $x < R$ .

1. Faire un schéma du nuage électronique en positionnant  $N$  et  $P$ .
2. Donner l'expression de la densité  $\rho$  en fonction de  $e$  et de  $R$ .
3. Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique  $\vec{E}_p$  créé par le nuage électronique en  $P$ .
4. En déduire l'expression de la force électrique subie par le proton et montrer que tout se passe comme si le proton était relié à l'électron par une force de rappel élastique, avec un ressort dont on précisera la longueur à vide  $\ell_0$  et la constante de raideur  $k$ . Faire l'application numérique avec  $R = 1 \text{ \AA}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .
5. Calculer la fréquence des oscillations du système avec  $m_{p^+} = 1,627 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et  $m_{e^-} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Exercice 5** Une boule de rayon  $R$ , de centre  $O$  est partiellement évidée : soit  $P$  un point de la sphère, une cavité sphérique de rayon  $\frac{R}{2}$  et de diamètre  $[O, P]$  y est creusée. La boule évidée porte une charge volumique  $\rho$ . Déterminer le champ électrique en un point  $M$  sur l'axe  $(O, P)$  tel que  $OM = x > R$ .

**Exercice 6** Un solénoïde infini, de rayon  $R$ , comporte  $n$  spires par mètre. Le fil est parcouru par un courant d'intensité  $i$ . On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur. Montrer qu'il est uniforme à l'intérieur et le déterminer.

**Exercice 7** Deux fils rectilignes infinis parallèles distants de  $D$  sont parcourus par le même courant d'intensité  $i$ . Déterminer le champ électrique en un point  $M$  situé dans leur plan et à égale distance d'eux ( $d/2$ ). Même question si les courants sont de sens opposés.

**Exercice 8** Un fil rectiligne infini (axe des  $x$ ) possède une charge linéique  $\lambda$ . Un observateur  $M$  se déplace à la vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  à la distance  $R$  de ce plan.

1. Déterminer le champ électrique ressenti par  $M$ .
2. Déterminer le potentiel électrique ressenti par  $M$  (on précisera la référence).
3. Montrer que  $M$  voit un courant électrique  $i$  circuler dans le fil ; préciser son sens et sa norme (on pourra faire une équation aux dimensions).
4. En déduire le champ magnétique ressenti par  $M$ .

**Exercice 9** Par application de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique créé par une spire circulaire en un point de l'axe.

**Exercice 10** Déduire de l'exercice précédent le champ magnétique créé par un ensemble de deux spires parallèles de rayon  $R$ , distantes de  $R$  (bobines de Helmholtz), en un point d'abscisse  $x$  sur l'axe  $(O, x)$  de symétrie du problème. Montrer que le champ est hyper stationnaire au voisinage de l'origine.

**Exercice 11** Déterminer le champ magnétique créé en un point de l'axe d'un solénoïde tel qu'on voit la première spire sous un cône de demi-angle au sommet  $\theta_1$  et la dernière  $\theta_2$ .