

Fiche méthodologique numéro 3

Électromagnétisme

27 février 2008

1 Les lois

L'électromagnétisme est basé sur quatre équations indiscutables (qui sont d'ailleurs cohérentes avec les lois de la relativité restreinte), les équations de Maxwell. Elles donnent les relations de couplage entre les champs électrique \vec{E} , magnétique \vec{B} , et les champs de charge ρ et de courant \vec{j} **volumiques**.

FORME	LOCALE	FORME	INTÉGRALE
Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Maxwell-Thomson $\text{div } \vec{B} = 0$	Théorème de Gauss $\int \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	conservativité du flux $\int \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Loi de Faraday $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$	Théorème d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$

L'équation de conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ forme en quelque sorte la "cinquième équation de Maxwell", et il faut toujours l'avoir présente à l'esprit.

Sur les surfaces de séparation de plusieurs milieux (les "dioptries"), la présence de charges et de courants **surfiques** nécessite l'écriture de lois complémentaires : les relations de passage. Elles se démontrent, en fait, par application du théorème de Gauss (respectivement Ampère) à un plan infini portant une charge (resp. un courant) surfique.

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

2 Les problèmes et les techniques de résolution

Il faut se faire une raison : on ne sait pas résoudre les équations de Maxwell dans le cas général.

► Les grands axes de travail sont donc les suivants :

axe 1 : on détermine les champs avec des répartitions de charge et de courant donnés ;

axe 2 : on énonce des relations supplémentaires relatives au milieu, liant les quatre champs ;
on obtient alors des équations aux dérivées partielles ;

axe 3 : on étudie la possibilité d'observer une onde ou une pseudo-onde plane dans le milieu :
l'équation clef est alors l'équation de dispersion, équation complexe dont l'inconnue est le vecteur d'onde \vec{k} .

► Pour traiter ces problèmes, on dispose par ailleurs de différentes techniques mathématiques :

technique 1 : l'analyse vectorielle permet de combiner les différentes équations aux dérivées partielles et le théorème de Schwartz permet de permuter les dérivations temporelles et spatiales ;

technique 2 : les formules intégrales de Stokes $\oint \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \iint \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{S}$ et d'Ostrogradski
 $\int \oint \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint \text{div } \vec{u} \cdot d\tau$;

technique 3 : le passage en formalisme complexe pour la recherche d'une pseudo-onde plane permet de remplacer un problème d'EDP par un problème d'algèbre complexe : si on cherche des grandeurs sous la forme $\underline{u} = u_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)}$ ou $\vec{u} = \vec{u}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)}$, alors $\text{grad } \underline{u} = -\vec{k} \underline{u}$, $\text{div } \vec{u} = -\vec{k} \cdot \vec{u}$ et $\text{rot } \vec{u} = -\vec{k} \wedge \vec{u}$.

- On peut retenir que * on recourt aux équations de Maxwell pour toutes les démonstrations de cours et l'étude de milieux "exotiques" * on utilise les lois pratiques du cours pour les études plus restreintes dont nous détaillons la liste dans la section suivante.

3 Les principales études au programme de PC, ... et quelques autres

1. Théorème de Gauss, électrostatique.
 - Propos** : déterminer \vec{E} dans les cas de fortes symétries de charges.
 - Spécificités** : figure soignée indispensable, calcul de flux et de charge intérieure.
 - Exercices typiques** : calcul de capacité.
2. Théorème d'Ampère, cas particulier de la magnétostatique.
 - Propos** : déterminer \vec{B} dans les cas de fortes symétries de courants.
 - Spécificités** : calcul de circulation et de courant enlacé.
 - Exercices typiques** : bobines de Helmholtz (B&S), solénoïde.
3. Poynting et bilan énergétique.
 - Propos** : calcul de $\vec{\Pi}$, équations locale et intégrale.
 - Spécificités** : flux et bilans d'énergie.
 - Exercices typiques** : bilans énergétiques pour R , L et C .
4. Induction.
 - Propos** : conséquence électrocinétique de \vec{B} variable ou de mouvement dans \vec{B} .
 - Spécificités** : orientations, loi de Faraday ou circulation, loi de Lenz.
 - Exercices typiques** : couplage électromécanique, HP.
5. OEM dans le vide : propagation.
 - Propos** : solutions de l'équation de d'Alembert dans le vide.
 - Spécificités** : étude approfondie de l'OPPHMPR puis de ses superpositions.
 - Exercices typiques** : recherche d'OPProgressive ou de d'OPStationnaire avec CL.
6. OEM dans le vide : polarisation.
 - Propos** : étude, production et analyse des ondes planes progressives monochromatiques.
 - Spécificités** : toute OPPM est superposition de deux OPPHMPR.
 - Exercices typiques** : analyse de polarisation, lames dichroïques, $\lambda/4$, $\lambda/2$.
7. Rayonnement du dipôle oscillant.
 - Propos** : champ EM au voisinage d'un dipôle oscillant.
 - Spécificités** : structure d'onde plane locale rayonnée.
 - Exercices typiques** : polarisation Rayleigh, bleu du ciel, Brewster.
8. OEM dans un diélectrique.
 - Propos** : étude des OEM dans un milieu neutre mais polarisable.
 - Spécificités** : relations entre \vec{P} , χ , ϵ_r , \underline{n} , milieux transparents, Descartes.
 - Exercices typiques** : e^- élastiquement lié, coefficients de réflexion, transmission.
9. Milieux "perturbés".
 - Propos** : on soumet des milieux au programme à des contraintes exceptionnelles.
 - Spécificités** : attention à bien comprendre ce qui reste vrai, et ce qui ne l'est plus.
 - Exercices typiques** : diode à vide, milieu électrisé ou magnétisé.
10. Milieux "exotiques".
 - Propos** : on étudie des milieux dont les lois constitutives sont originales.
 - Spécificités** : on s'inspire des techniques d'étude déjà utilisées, et on établit les lois.
 - Exercices typiques** : effet de peau, plasma, ...