

Devoir à la maison numéro 1

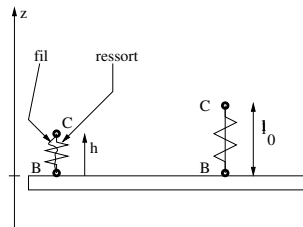
Mécanique des systèmes de points

PC, à rendre le 18 septembre 2008

1 Stylo sauteur

On modélise un stylo à cliquet par un système à deux points matériels : le corps du stylo C de masse $M = 20\text{g}$ est relié au bouton B de masse $m = 2,0\text{g}$ par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 3,0\text{cm}$ et de constante de raideur k . On pose le stylo à la verticale, le bouton B au contact d'une table horizontale formant l'origine de l'axe (O, z) et la référence de l'énergie potentielle de pesanteur, avec le ressort comprimé : sa longueur vaut alors $h = 1,0\text{cm}$. On libère le cliquet du stylo.

1. On suppose qu'un fil souple mais inextensible de longueur ℓ_0 relie B et C , de telle sorte que BC ne peut dépasser ℓ_0 .

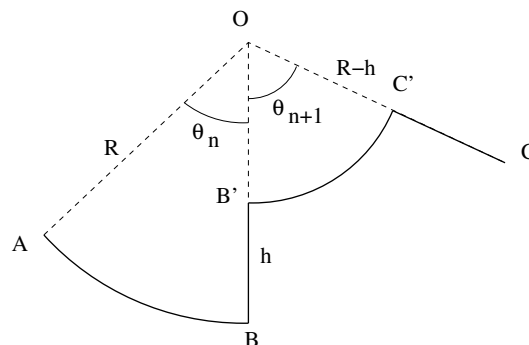


Déterminer la valeur minimale de k pour que B décolle du sol. Montrer dans ce cas que la vitesse de C subit une discontinuité au moment du décollage.

2. On ôte le fil inextensible. Déterminer la valeur minimale de k pour que B décolle du sol. C subit-il, cette fois, une discontinuité au moment du décollage?

2 Balançoire

Un enfant de masse M monte sur le plateau d'une balançoire. À partir d'une petite amplitude de balancement, repérée par l'angle θ_0 , il accroît cette amplitude en s'accroupissant et en se relevant de façon régulière. Il utilise pour cela sa force musculaire, ce qui lui permet d'apporter (ou de récupérer) régulièrement de l'énergie mécanique au système qu'il forme avec la balançoire (il convertit en fait de l'énergie chimique en travail). Le mouvement du centre d'inertie G du système décrit le chemin $[ABB'C'C]$:



- En A , l'enfant est accroupi, $OA = R$, la vitesse initiale est nulle, l'angle d'inclinaison vaut θ_n .
- En B , l'enfant est toujours accroupi, $OB = R$; il se relève en un temps très bref et atteint B' , enfant debout avec $OB' = R - h$.
- En C' , l'enfant est debout, $OC' = R - h$, il se réaccroupit en un temps très bref.
- En C , l'enfant est accroupi, $OC = R$, la vitesse finale est nulle, l'angle d'inclinaison vaut θ_{n+1} .
- À partir de C , un nouveau cycle recommence.

Tous les angles sont mesurés en valeur absolue. On néglige la masse du siège devant la masse de l'enfant. On note g l'accélération de la pesanteur. On suppose que les cables qui soutiennent le siège sont rigides.

1. Établir la relation de récurrence vérifiée par la suite $(\cos \theta_n)$.
2. Déterminer la limite éventuelle de cette suite, et celle de (θ_n) .
3. Donner l'expression de $\cos \theta_n$ et de θ_n en fonction de n et de θ_0 .
4. Concrètement, les cables d'une balançoire sont en corde, inextensibles mais non rigides; comment est-il pourtant possible d'atteindre des valeurs de θ dépassant $\frac{\pi}{2}$?
5. Dresser l'allure du portrait de phase $(\theta, \dot{\theta})$.