Devoir surveillé numéro 4

Étude d'un écoulement

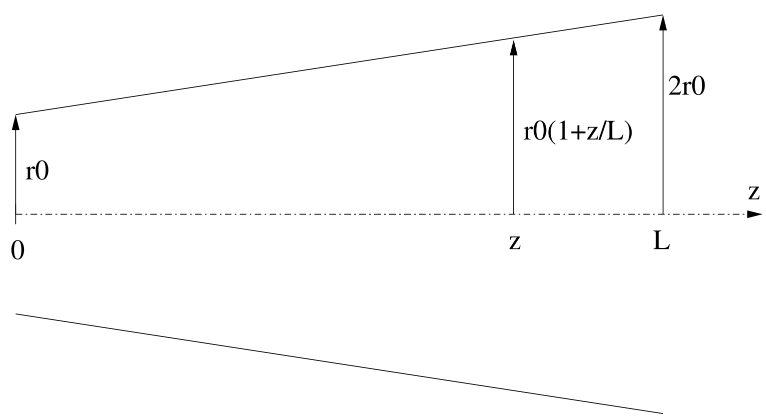
PC, 16 octobre 2008

On étudie l'écoulement fluide incompressible, de masse volumique μ caractérisé par le champ eulérien des vitesses donné en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{v} = v_r \overrightarrow{u}_r + v_\theta \overrightarrow{u}_\theta + v_z \overrightarrow{u}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_r = \frac{L^2 r \delta}{\mu \pi r_0^2 (z+L)^3} \\ v_\theta = 0 \\ v_z = \frac{L^2 \delta}{\mu \pi r_0^2 (z+L)^2} \end{cases}$$

Cet écoulement est canalisé dans une tuyère conique dont le rayon r évolue avec la cote z selon la loi

$$R = r_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right)$$



1. Déterminer le débit massique à travers la section circulaire de la tuyère de cote z.
2. Vérifier par le calcul que l'écoulement est incompressible.
3. Rappeler et vérifier l'équation de conservation de la masse (aucun gros calcul supplémentaire n'est nécessaire).
4. L'écoulement est-il rotationnel ?
5. L'écoulement est-il stationnaire ?
6. Rappeler, sans effectuer le calcul, les deux expressions de l'accélération particulaire $\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}$; laquelle a-t-on intérêt à choisir si on voulait effectuer le calcul ?

Données.
- Élément de surface en coordonnées cylindriques : $d\overrightarrow{S} = r dr d\theta \overrightarrow{u}_z$.
- Opérateurs en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right. , \quad \text{div}\, \overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial r A_\theta}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{array} \right.$$