

Feuille d'exercices numéro 5

Équations de Maxwell

PC, 13 novembre 2008

On donne $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Équations de Maxwell

Exercice 1 Calcul des champs dans une distribution de charges et courants. Une distribution de charges et de courants possède une symétrie cylindrique. Dans le système de coordonnées cylindriques, son expression est : $\rho(r, z, \theta, t) = \rho_0 \frac{t}{\tau} \frac{r_0}{r}$ et $\vec{j}(r, z, \theta, t) = -j_0 \vec{u}_r$ avec $\rho_0 = 1,5 \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$, $\tau = 1,5 \mu\text{s}$ et $r_0 = 1,5 \text{cm}$.

1. En utilisant la loi de conservation de la charge, calculer la valeur numérique de j_0 .
2. On cherche un champ électromagnétique du type $\vec{E}(r, z, \theta, t) = E(r, t) \vec{u}_r$ et $\vec{B}(r, z, \theta, t) = \vec{0}$.
 - (a) Vérifier la cohérence avec l'équation de Maxwell-Thomson (relative à la divergence de \vec{B}).
 - (b) Montrer que l'équation de Maxwell-Gauss (relative à la divergence de \vec{E}) permet de donner l'expression de \vec{E} en fonction de r , t et d'une "constante" d'intégration indépendante de r mais fonction du temps qu'on pourra noter $K(t)$.
 - (c) Montrer que $K(t)$ est indépendante du temps en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère (relative au rotationnel de \vec{B}); on pourra noter $K(t) = K$.
 - (d) Montrer que le résultat obtenu est cohérent avec l'équation de Maxwell-Faraday (relative au rotationnel de \vec{E}).
 - (e) Écrire le théorème de Gauss pour une surface correctement choisie et en déduire que $K = 0$.
 - (f) Calculer numériquement la norme du champ électrique à la date $t = \tau$.

Exercice 2 Calculs numériques de divers potentiels. Dans les questions suivantes, on se place en coordonnées cylindriques, $V(r, \theta, z, t)$ est un champ potentiel électrique scalaire exprimé en V et $\vec{A}(r, \theta, z, t)$ un champ potentiel vecteur

1. Le champ magnétique créé par un fil rectiligne infini d'axe (O, z) parcouru par un courant d'intensité $i = 1,50 \text{A}$ est $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$. Déterminer le potentiel vecteur sous la forme $\vec{A} = A(r) \vec{u}_z$. On choisit $\vec{A}(r_0) = \vec{0}$ avec $r_0 = 1 \text{m}$. Calculer $\vec{A}(2, 718)$
2. Le champ électrique créé par un fil rectiligne infini d'axe (O, z) portant une charge linéique $\lambda = 1,50 \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ est $\vec{E} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi r} \vec{u}_r$ avec $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$. Déterminer le potentiel électrique en supposant le champ magnétique uniformément et constamment nul. On choisit $V(r_0) = 0$ avec $r_0 = 1 \text{m}$. Calculer $V(2, 718)$.
3. La jauge de Coulomb est définie par $\text{div} \vec{A} = 0$. La jauge de Lorentz est définie par $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0$ où $c_0 = 3,00 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(a) Pour lesquels des potentiels vecteurs suivants la jauge de Coulomb est-elle vérifiée ?

$$\vec{A}_1 = A_0 \vec{u}_r, \quad \vec{A}_2 = A_0 \vec{u}_\theta, \quad \vec{A}_3 = A_0 \vec{u}_z, \quad \vec{A}_4 = A_0 \frac{r_0}{r} \vec{u}_z$$

(b) Soit le potentiel vecteur $\vec{A} = A_0 \frac{z}{z_0} \vec{u}_r$ avec $z_0 = 1,00\text{m}$ et $A_0 = 1,00 \cdot 10^{-8}\text{Tm}$.

- i. Déterminer l'expression de $V(r, \theta, z, t)$ telle que la jauge de Lorentz soit vérifiée et $V(r, \theta, z, 0) = 0$.
- ii. Déterminer les champs \vec{E} et \vec{B} correspondants.
- iii. Soit $\psi(r, \theta, z, t)$ un champ scalaire quelconque. Montrer que les potentiels $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \psi$ et $V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ définissent les mêmes champs \vec{E} et \vec{B} que les potentiels \vec{A} et V .
- iv. En déduire un couple de champs \vec{A}' et V' tels que V' soit uniformément nul et définissant les mêmes champs \vec{E} et \vec{B} que les potentiels \vec{A} et V .
- v. Calculer numériquement, dans ce cas, les composantes de \vec{A} à $t = 1,00 \cdot 10^{-8}\text{s}$, au point de coordonnées cylindriques $r = \frac{c_0 t}{\sqrt{2}} \simeq 2,12\text{m}$, $\theta = 0$ et $z = z_0 = 1,00\text{m}$.

Relations de passage

Exercice 3 Calculs numériques sur les relations de passage.

1. Un métal parfait occupe le demi-espace $x < 0$. Les champs électrique et magnétique sont uniformément nuls à l'intérieur du métal. On donne les densités surfaciques de charge $\sigma = 0$ et de courant $\vec{j}_S = j_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$ avec $j_0 = 5,0\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\omega = 1,0 \cdot 10^{15}\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer numériquement l'amplitude des champs électrique et magnétique en $x = 0^+$.
2. Un matériau (1) occupe le demi-espace $x < 0$ et un matériau (2) le demi-espace $x > 0$. Les champs électriques en $x = 0^-$ et $x = 0^+$ sont perpendiculaires entre eux, symétriques par rapport au plan de séparation $x = 0$ et de norme commune $E_0 = 1,0 \cdot 10^6\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer la densité surfacique de charge σ .

Exercice 4 Un condensateur sphérique est formé de deux sphères concentriques, de rayons r_1 et r_2 , portant les charges respectives q et $-q$. Déterminer les densités surfaciques σ_1 et σ_2 . Le champ électrique est nul pour $r < r_1$ et $r > r_2$, et radial pour $r_1 < r < r_2$. Déterminer sans calcul les expressions du champ électrique en r_1^+ et en r_2^- . En déduire $\vec{E}(r)$, $V(r)$ et la capacité C du condensateur.

Exercice 5 Le champ magnétique créé par un solénoïde infini, portant n spires par mètre, parcouru par un courant d'intensité i , est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur. Déterminer ses caractéristiques.

Poynting

Exercice 6 Champ électromagnétique solaire au niveau de la Terre. La Terre se situe à $r_T = 1,55 \cdot 10^{11}\text{m}$ du Soleil. Elle est soumise à son rayonnement électromagnétique dont on modélise les caractéristiques, en coordonnées sphériques, par : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_\theta$ et $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_\varphi$ avec $E_0 = c_0 B_0$, $c_0 = 3,00 \cdot 10^8\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. La valeur moyenne de la puissance émise par le Soleil est $\mathcal{P} = 3,82 \cdot 10^{26}\text{W}$.

1. Donner l'expression du vecteur de Poynting en un point de la Terre en fonction de E_0 .
2. En déduire le flux de ce vecteur à travers une sphère Σ de centre le centre du Soleil et de rayon r_T et donner sa valeur moyenne en fonction de E_0 .
3. En déduire les valeurs numériques de E_0 et de B_0 .
4. Calculer la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique au niveau de la Terre.

Exercice 7 Calcul d'une inductance par méthode énergétique. En écrivant que $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ est l'énergie volumique emmagasinée par un solénoïde en régime permanent, donner l'expression de l'inductance L d'un solénoïde de rayon R et de longueur d .

Exercice 8 Équation locale de Poynting. Un plan infini (O, x, y) porte une densité surfacique de charges σ uniforme. Il est animé d'un mouvement de translation uniforme à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_y$. Déterminer les champs \vec{E} et \vec{B} et le vecteur de Poynting en tout point de l'espace de cote z non nulle. Vérifier l'équation locale de Poynting.

Étude des dipôles

Exercice 9 Diode à vide. Dans une ampoule où règne un vide poussé, un fil rectiligne axial et une plaque cylindrique de hauteur h , de rayon R , sont portés aux potentiels 0 (cathode) et V_0 (anode). La cathode, chauffée, émet par effet thermoélectronique des électrons de façon radiale avec une très faible vitesse. En régime permanent, on note i l'intensité du courant circulant dans les fils d'alimentation entrant dans l'anode et sortant de la cathode, $V(r)$, $\rho(r)$ et $\vec{v}(r) = v(r)\vec{u}_r$ les champs de potentiel, charge volumique et vitesse entre les deux plaques.

1. Établir les trois relations liant $V(r)$, $\rho(r)$ et $v(r)$.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(r)$.
3. La résoudre en cherchant une solution du type $V(r) = Kr^\alpha$.
4. En déduire l'équation et la forme de la caractéristique du dipôle et conclure.

Exercice 10 Condensateur. Lors de la charge d'un condensateur formé de deux disques parallèles, de rayon R , d'axe (O, z) et distants de $d \ll R$, la densité surfacique sur la plaque positive varie dans le temps selon la loi $\sigma = \sigma(t)$.

1. Déterminer le champ électromagnétique entre les plaques en l'absence de toute autre charge ou courant (on néglige les effets de bord).
2. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting entre les électrodes du condensateur.
3. Écrire l'équation locale de Poynting et en déduire que $\sigma'(t) = cste$. Indiquer comment on peut assurer cette propriété dans le montage électrique.
4. Calculer le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface fermée constituée du cylindre délimité par les deux armatures. Vérifier la validité de l'équation intégrale de Poynting.
5. Le condensateur est alimenté par un générateur de courant d'intensité I_0 . Faire le bilan énergétique de la charge de ce condensateur sur une durée t .

Exercice 11 Solénoïde. Lors de l'établissement du courant dans un solénoïde comportant N spires, de longueur d , de rayon R , d'axe (O, z) , l'intensité du courant varie selon la loi $i = i(t)$. Le champ magnétique est supposé uniforme à l'intérieur $\vec{B} = \mu_0 ni\vec{u}_z$ avec $n = \frac{N}{d}$ (nombre de spires par mètre), nul à l'extérieur, et le champ électrique $\vec{E} = E(r)\vec{u}_\theta$ (c'est une conséquence des symétries du problème).

1. Déterminer l'expression de $E(r)$ (on néglige les effets de bord).
2. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting à l'intérieur du solénoïde.
3. Écrire l'équation locale de Poynting et en déduire que $i'(t) = cste$. Indiquer comment on peut assurer cette propriété dans le montage électrique.
4. Calculer le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface fermée constituée du cylindre formé par la bobine. Vérifier la validité de l'équation intégrale de Poynting.
5. Le solénoïde est alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice e . Faire le bilan énergétique de l'établissement du courant dans ce solénoïde sur une durée t .

Exercice 12 Étude énergétique de la loi d'Ohm. Un fil conducteur ohmique de conductivité γ a la forme d'un cylindre infini d'axe (O, z) , de rayon r_0 . Il règne dans tout l'espace un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

1. Donner l'expression de la densité de courant dans le fil, celle du champ magnétique et celle du vecteur de Poynting en fonction de r .
2. Calculer le flux de $\vec{\Pi}$ à travers un cylindre d'axe (O, z) , de rayon $r > r_0$ et de hauteur h .
3. Conclure.

Régimes stationnaire et quasistationnaire

Exercice 13 Champ magnétique créé par un fil épais. Un cylindre infini de rayon R est parcouru par un courant d'intensité I , la densité volumique de courant $\vec{j}(r, t) = j\vec{u}_z$ est supposée uniforme. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(r)$.

Exercice 14 Équation de Poisson. Établir l'équation de Poisson vérifiée par V en régime stationnaire. Montrer de même que si on impose $\text{div } \vec{A} = 0$, \vec{A} vérifie l'équation de Poisson vectorielle $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$.

Exercice 15 Régime quasistationnaire. Rappeler et démontrer l'approximation faite dans les équations de Maxwell sous l'approximation des régimes quasi stationnaires. Démontrer qu'alors $\text{div } \vec{j} = 0$.

Exercice 16 Conducteur ohmique. Établir l'équation différentielle vérifiée par ρ dans un conducteur ohmique de conductivité γ . Justifier que $\rho \simeq 0$ et reformuler les équations de Maxwell dans ce cas.

Exercice 17 Effet de peau dans un conducteur ohmique. Le métal conducteur est caractérisé par sa résistivité ρ_s ou sa conductivité $\gamma = \frac{1}{\rho_s}$; la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par ρ dans un conducteur ohmique de conductivité γ .
2. Justifier que $\rho \simeq 0$ et reformuler les équations de Maxwell dans ce cas.
3. En déduire que le champ électrique vérifie une équation aux dérivées partielles de diffusion : $\Delta \vec{E} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.
4. Résoudre cette équation différentielle en régime sinusoïdal forcé dans le cas d'une géométrie simple : le demi-espace $x < 0$ est vide, le conducteur ohmique occupe le demi-espace $x > 0$ et on cherche un champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(x, t)E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi) \vec{u}_y$. Déterminer δ et interpréter physiquement.

Exercice 18 Introduction à l'induction. Un solénoïde cylindrique d'axe (O, z) de rayon r_0 comportant n spires par mètre est parcouru par un courant variable dont l'intensité est $i(t) = I \cos(\omega t)$. On admet que le champ magnétique propre créé par le solénoïde est uniforme à l'intérieur ($r < r_0$) et que le champ électrique est orthoradial :

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

1. Déterminer le champ \vec{E} à l'intérieur du solénoïde.
2. On place un cylindre massif long de conductivité γ , de hauteur h et de rayon $r_1 < r_0$ à l'intérieur du solénoïde et de même axe. Déterminer la densité de courant \vec{j} créée par le champ électrique \vec{E} . Quel est l'effet observable associé à ces courants ?
3. En déduire le champ magnétique \vec{B}_i (appelé induit) créé sur l'axe par les courants et donner la condition sous laquelle ce champ est négligeable devant celui créé par le solénoïde.
4. Si cette condition n'est pas vérifiée, indiquer sans justification la répartition des courants dans le cylindre.