Feuille d'exercices numéro 1

Mécanique du point et des systèmes de points

PC, 3 septembre 2008

Forces centrales

On donne, pour tous les exercices, les valeurs numériques $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2}$, $m_S = 2,00 \cdot 10^{30}kg$, $m_T = 5,98 \cdot 10^{24}\text{kg}$, $g_0 = 9,81m \cdot s^{-2}$, $R_T = 6,38 \cdot 10^6\text{m}$. On suppose l'orbite de la Terre circulaire autour du Soleil avec le rayon $ST = 1,55 \cdot 10^{11}\text{m}$.

Exercice 1 Satellisation en orbite basse et libération.

1. Soient $\mathcal{G}$ la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, g_0 l'accélération de la pesanteur à sa surface. Démontrer la relation $\mathcal{G}M_T = g_0{R_T}^2$.
2. On cherche à satelliser un mobile autour de la Terre à une altitude de $z = 1km$ au dessus du niveau de la mer. Faire l'inventaire des problèmes pratiques, techniques et physiques que poserait une telle entreprise. Calculer néammoins sa période de révolution T, et sa vitesse v_{ob} dans le référentiel de centre le centre O de la Terre et d'axes conservant des directions fixes. Donner leur expression en fonction des grandeurs g_0 et R_T. Si le satellite tourne au dessus de l'équateur, à quelle vitesse v_r passera-t-il au dessus des observateurs qui s'y trouvent ? (distinguer 2 cas selon le sens de rotation).
3. En raisonnant sur le signe de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse minimale v_L que l'on doit donner, à partir de la surface de la Terre, à un mobile qu'on désire faire sortir du système solaire. Cette vitesse est appelée vitesse de libération. Donner son expression en fonction des grandeurs g_0 et R_T. La vitesse (dite quadratique) moyenne des molécules de l'atmosphère terrestre est de l'ordre de $0,5km \cdot s^{-1}$. Que peut-on penser du risque de la voir se disperser dans l'espace ?
4. Comparer v_{ob} et v_L. Conclure.

Exercice 2 Propriété des trois énergies en orbite circulaire. Montrer que dans le cas d'un satellite en orbite circulaire, les énergies mécanique, cinétique et potentielle sont reliées par des relations très simples. Dans le cas d'un satellite en orbite faible, quelle est l'influence des frottements de la haute atmosphère sur E_m ? Quel résultat a priori étonnant peut-on en déduire sur la vitesse du satellite ?

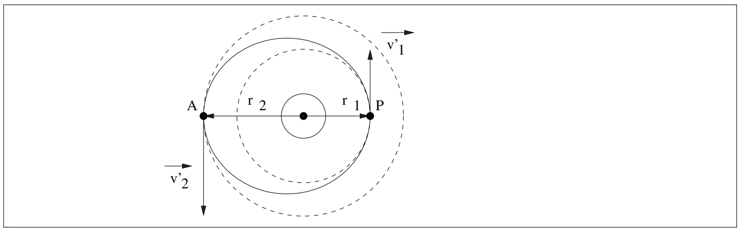
Exercice 3 Période de Schüller. On creuse un très grand tunnel qui va en ligne droite du pôle Nord à un point de latitude λ. La Terre est supposée homogène et sphérique, de rayon R, et on suppose le référentiel terrestre galiléen. On admet qu'en tout point du tunnel, si on appelle r la distance à laquelle on se trouve du centre O de la Terre, l'accélération de la pesanteur est dirigée vers O et son intensité est $g(r) = g_0 \frac{r}{R}$. On lâche depuis le pôle Nord un point matériel P de masse m sans vitesse initiale dans le tunnel. Il y glisse sans frottement. Donner l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force de gravitation à l'intérieur de la Terre. Étudier le mouvement, déterminer le temps du voyage jusqu'à l'autre extrémité du tunnel. En déduire la période T_0 des oscillations de la masse dans le tunnel. Comparer avec le résultat de l'exercice **1.1**. Cette période commune s'appelle la période de Schüller.

Exercice 4 Application numérique directe. Un satellite terrestre de masse $m = 150kg$ a son périgée à $350km$ d'altitude et une période de $5843s$. Calculer le demi-grand axe a de sa trajectoire, l'excentricité e de l'ellipse qu'il décrit, l'altitude de son apogée et son énergie mécanique.

Exercice 5 Comète de Halley. Sa période est de $76,03$ années, sa distance minimale au Soleil est $0,59ST$. Calculer sa distance maximale au Soleil. La comète a été observée en 1986. En quelle année atteindra-t-elle ce point éloigné. A-t-on des chances de pouvoir l'observer tout là-bas grâce au nouveau téléscope spatial *Hubble* ?

Exercice 6 Comète limite. Une comète passe à une distance minimale du Soleil égale à la moitié du rayon ST de l'orbite terrestre avec une vitesse égale au double de la vitesse de la Terre. Cette comète reviendra-t-elle ? Que peut-on penser de la sensibilté de cette réponse aux mesures ?

Exercice 7 Ellipse de transfert. Une fusée de lancement dépose un satellite sur une orbite circulaire et uniforme de rayon r_1, à la vitesse v_1 autour de la Terre. À partir d'un point de cette orbite, on communique au satellite une vitesse v_1' tangente au cercle qui doit lui permettre d'arriver tangentiellement à une nouvelle orbite circulaire de rayon r_2 ; il atteint cette orbite avec une vitesse v_2', puis on lui communique sa vitesse finale v_2 lui permettant de se satelliser sur la nouvelle orbite circulaire.



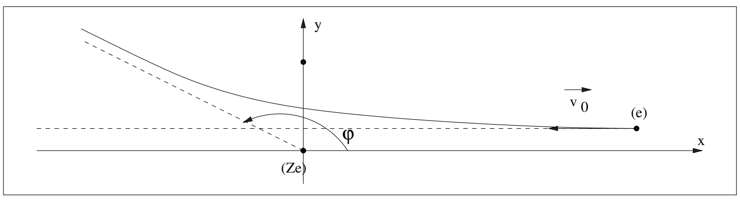
Donner les expressions des vitesses v_1', v_2' et la durée du transfert. Les données sont les rayons r_1, r_2 et les caractéristiques m_T et $\mathcal{G}$.

Exercice 8 Tir Nord-Sud.

1. Pourquoi ne peut-on faire l'économie d'un lanceur en envoyant directement un satellite par un procédé balistique depuis la surface de la Terre ?
2. On veut envoyer un projectile depuis le pôle Nord de la Terre sur le pôle Sud. Quelles conditions doivent vérifier la vitesse initiale v_0 et l'angle α entre sa direction et l'axe des pôles pour réussir ce tir ?

Exercice 9 Expérience de Rutherford.

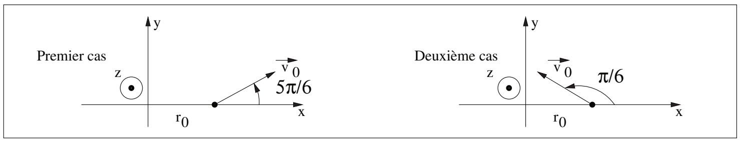
1. Faire l'(excellent)exercice de mémoire suivant : étant données l'analogie formelle entre la force électrique exercée par une charge fixe Q sur une charge q et la force gravitationnelle exercée par M sur m, réécrire le tableau de synthèse des propriétés des mouvements à force centrale en remplaçant les masses par les charges et la constante $\mathcal{G}$ par $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.
2. *L'expérience de la diffusion de Rutherford permit, historiquement, de montrer que les atomes sont constitués d'un noyau positif et entouré d'un nuage d'électrons*. On bombarde une feuille d'or extrêmement fine (or "frappé") par des particules α (noyaux d'hélium He^{2+}) de masse m . Celles-ci arrivent avec une vitesse v_0 perpendiculairement à la feuille. On considère une de ces particules, qui passerait à la distance b d'un noyau d'or fixe en N en l'absence d'interaction. Le noyau est chargé positivement $(+Ze)$.



Montrer que la trajectoire est hyperbolique. On appelle φ l'angle que les deux asymptotes font entre elles, c'est-à-dire l'angle de déviation de la particule. Déterminer l'expression de φ en fonction de v_0, b et m.

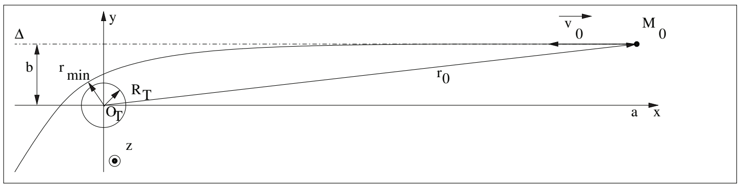
Énergie potentielle effective

. Soit une force centrale dérivant de l'énergie potentielle $Ep(r) = -\frac{1}{3r^3}$. À la date $t = 0$, le mobile M de masse $m = 2$kg passe à la distance $r_0 = 2$m de O avec une vitesse de norme $v_0 = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ faisant un angle $\frac{\pi}{6}$ (premier cas) ou $\frac{5\pi}{6}$ (deuxième cas) avec le rayon vecteur $\overrightarrow{OM_0}$:



1. Déterminer le moment cinétique initial et l'énergie mécanique initiale.
2. Grâce à l'énergie potentielle effective, déterminer les valeurs possibles de r.
3. Par une analyse fine, en déduire l'allure possible de la trajectoire dans chacun des deux cas.

Exercice 10 Distance minimale d'approche. Un astéroïde (de masse m et de rayon de l'ordre du kilomètre) est repéré à une distance très grande de la Terre (de masse $m_T = 6 \cdot 10^{24}$kg et de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^6$m). Il se trouve alors à environ 10 millions de kilomètres de la Terre, en mouvement presque rectiligne uniforme en négligeant la force d'attraction gravitationnelle qu'il subit de la part de la Terre à une telle distance. La droite Δ sur laquelle il se déplace passe à une distance b du centre O_T de la Terre : $d(O_T, \Delta) = b$, b s'appelle le **paramètre d'impact**. Sa vitesse dans le référentiel géocentrique est $\overrightarrow{v}_0 = -v_0 \overrightarrow{u}_\Delta$.



On mesure $b = 15,0 \cdot 10^6$m et $v_0 = 15\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ et on cherche à savoir si l'astéroïde entrera en collision avec la Terre (on néglige le rayon de l'astéroïde devant R_T).

1. On définit le rayon minimal $r_{min} = O_T M_{min}$. En raisonnant sur l'énergie potentielle effective, déterminer r_{min}.
2. Calculer numériquement r_{min} et en déduire si la collision aura lieu.

Cinématique des systèmes de points

Exercice 11 (AN) **Vérification des théorèmes de Kœnig**. On donne les masses, vecteurs position et vitesse d'un système de quatre points :

$$M_1 : \quad m_1 = 1\text{kg} \ ; \ \overrightarrow{OM_1} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \ \overrightarrow{v}_1 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \qquad M_2 : \quad m_2 = 2\text{kg} \ ; \ \overrightarrow{OM_2} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \ \overrightarrow{v}_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$M_3 : \quad m_3 = 1\text{kg} \ ; \ \overrightarrow{OM_3} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \ \overrightarrow{v}_3 \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \qquad M_4 : \quad m_4 = 2\text{kg} \ ; \ \overrightarrow{OM_4} \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. \ \overrightarrow{v}_4 \left| \begin{array}{l} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Déterminer les caractéristiques du centre d'inertie G. Déterminer les coordonnées des vecteurs position et vitesse dans le référentiel barycentrique. Déterminer la résultante cinétique, le moment cinétique et l'énergie cinétique du système dans le référentiel fixe et dans le référentiel barycentrique. Vérifier les théorèmes de Koenig.

Problème à deux corps : généralités

Exercice 12 Une barque sur l'océan. Une barque de masse m et de longueur L, de centre d'inertie I, est occupée par deux personnes de masses m_1 et m_2 en A et B, aux deux extrémités de la barque. Elles échangent leurs positions. La barque est initialement immobile et elle glisse sans frottement à la surface de l'eau. Déterminer la nouvelle position de I.

Exercice 13 Système sauteur. Deux mobiles ponctuels M_1 et M_2 de même masse m sont reliés par un ressort vertical de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'axe vertical est noté (O, z), O est sur le sol et le référentiel terrestre est supposé galiléen. On tient le mobile M_1 à l'altitude initiale $h+\frac{\ell_0}{2}+\frac{mg}{2k}$, le mobile M_2 est alors en équilibre (on le vérifiera sans difficulté) sous le ressort vertical à l'altitude initiale $h-\frac{\ell_0}{2}-\frac{mg}{2k}$, et le centre d'inertie G, au milieu, est à l'altitude h. A la date $t=0$, on lâche M_1 sans vitesse initiale. On pose $z_1 = z_G + e$ et $z_2 = z_G - e$. Déterminer l'équation horaire $z_G(t)$. Déterminer l'énergie cinétique du système des deux masses en utilisant le deuxième théorème de Kœnig, l'énergie mécanique généralisée en fonction de z_G et de e. En déduire l'équation différentielle vérifiée par e et les équations horaires $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

Exercice 14 Dipôle électrique indéformable. Un bipoint $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est tel que M_1 porte une charge $+q$, M_2 une charge $-q$ et la distance $d = M_1M_2$ reste constante sous l'action d'une force intérieure. Il évolue dans le plan vertical (O, x, z) de la figure. Il est placé entre les plaques d'un condensateur où règne un champ électrique horizontal, constant et uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_x$. On repère l'état de ce bipoint par la position de G et l'angle θ d'inclinaison du bipoint par rapport à l'horizontale. On suppose que θ est un petit angle. À la date $t=0$, on abandonne sans vitesse initiale le bipoint en l'inclinant d'un faible angle θ_0.

1. Énoncer précisément dans ce cas les théorèmes suivants : résultante cinétique, moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique et puissance cinétique.
2. Déterminer le mouvement de G.
3. Établir l'expression du moment cinétique en G du bipoint en fonction de m_1, m_2, d et $\dot{\theta}$.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ. Donner la période des petites oscillations.

Exercice 15 Quatre protons de masse m et de charge e sont abandonnés sans vitesse initiale aux sommets d'un carré de côté a. Quelles seront leurs vitesses lorsque le carré aura doublé de côté ? On négligera tout effet gravitationnel.

Problèmes à deux corps isolés en interaction

Exercice 16 Découverte historique du deutérium. On considère un atome d'hydrogène dont le noyau de charge $+e$ est immobile. L'unique électron de masse m_{e^-} effectue la transition du niveau d'énergie p (entier naturel non nul) au niveau d'énergie q (entier naturel non nul strictement inférieur à p). On admet qu'il y a émission d'un photon de longueur d'onde λ et de nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \alpha m_{e^-}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right]$. La constante α ne dépend que de la charge élémentaire e, de la constante de Planck h, de la permittivité diélectrique du vide ε_0 et de la célérité de la lumière dans le vide c. Quelle est la variation relative du nombre d'onde σ entre l'atome d'hydrogène 1 et l'atome de deuterium, ou hydrogène ?

Exercice 17 Masse d'une exoplanète. L'observation très précise d'une étoile a donné les résultats suivants. (a) On a pu établir (par mesure de décalage Doppler) que l'oscillation vue depuis la Terre est sinusoïdale, ce qui correspond à un mouvement de rotation circulaire uniforme de rayon R du centre de l'étoile S. (b) L'observation du spectre de l'étoile permettent de déterminer assez précisément son type stellaire et sa masse, soit $m_S = 1,0\cdot 10^{30}$kg. (c) On mesure la période $T = 42$ jours 5 heures (soit $T = 3\ 646\ 800$s) et l'amplitude $d = 2R = 5,0\cdot 10^9$m des oscillations de l'étoile. Déterminer la masse m_E de l'exoplanète E.