Travaux Dirigés numéro 10

Conséquences mécaniques des champs électrique, gravitationnel et magnétique

PC, 21 novembre 2008

Exercice 1 Les forces de marée.

1. Établir, en appliquant le théorème de Gauss gravitationnel, l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{g}$ créé par une planète sphérique de masse totale M, de centre O et de rayon R, en un point A tel que $OA \geq R$. En déduire l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{f}$ subie par un corps ponctuel de masse m placé en A.
2. Un astre sphérique S de masse M_S, de centre O_S et de rayon R_S est fixe dans son propre référentiel astro-centrique $\mathcal{R}_S$ supposé galiléen. Une planète sphérique P de masse M_P, de centre O_P et de rayon R_P est satellisée autour de l'astre, en orbite circulaire de rayon $r = O_SO_P$. Le référentiel astro-planète $\mathcal{R}_{ap}$ (hélio-terrestre ou terro-lunaire) est le référentiel suiveur du mouvement de rotation de la planète vu depuis le centre de l'astre : il a pour point fixe le point O_S et est en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante ω, vitesse de rotation de la planète autour de l'astre.
   (a) Faire un schéma du dispositif.
   (b) En écrivant l'équilibre de la planète dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_{ap}$, établir la relation entre ω, $\mathcal{G}$, M_S et r.
3. On considère un mobile K de masse m, immobile à la surface de la planète. On distingue quatre cas : En K_1, K est aligné avec $[O_S, O_P]$, du côté de l'astre (il est "midi"). En K_2, K est aligné avec $[O_S, O_P]$, du côté opposé à l'astre (il est "minuit"). En K_3 et en K_4, le triangle (O_S, O_P, K) est isocèle en O_S. Les quatre points sont donc à la distance égale R_P du centre de la planète O_P mais leurs distances au centre de l'astre sont variables : $O_SK_1 < O_SK_3 = O_SO_P = r = O_SK_4 < O_SK_2$ (cf. figure 1) Dans le référentiel $\mathcal{R}_{ap}$, K subit donc, outre les éventuelles forces de contact, les trois forces suivantes : force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{f}_P$ de la part de la planète, force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{f}_A$ de la part de l'astre, la force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{f}_{ie}$ axifuge (la force d'inertie de Coriolis est nulle car K est immobile).
   (a) Montrer qu'en K_3 et en K_4, $\overrightarrow{f}_A$ et $\overrightarrow{f}_{ie}$ s'annulent. Déterminer en K_1 laquelle des deux forces a la plus grande norme ; faire de même en K_2.
   (b) En déduire pourquoi la forme des océans éventuels à la surface de la planète est celle donnée sur la figure 2. Quel est le phénomène mis ainsi en évidence ? Pourquoi semble-t-il responsable de la destruction d'un satellite qui se trouverait trop proche de l'astre (et dont les débris ont pu donner les anneaux de Saturne) ? Pourquoi la Lune a-t-elle une face cachée ?
   (c) Donner un ordre de grandeur de la force de marée en K_1 (faire un développement limité en supposant $r >> R_P$).

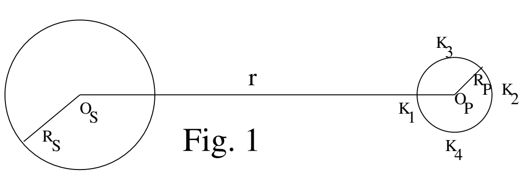

Fig. 1

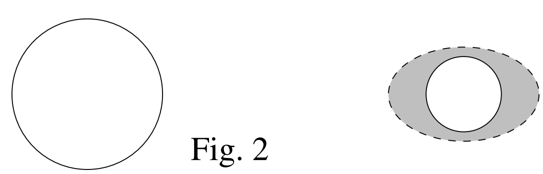
Fig. 2

Exercice 2 Les deux soleils de Tatooine. Dans la saga de science fiction Star Wars, la planète natale d'Anakin Skywalker, Tatooine, de mass m_T et de centre O_T, possède deux soleils. On suppose que ces deux soleils sont de même masse m_S, que leurs centres O_1 et O_2 sont distants de d, et que (O_1, O_2, O_T) forme un triangle équilatéral. On suppose que $m_T \ll m_S$.

1. Déterminer la période de révolution des deux étoiles l'une autour de l'autre.
2. Montrer que Tatooine peut rester à la même position par rapport aux deux étoiles.
3. Peut-il faire alternativement jour et nuit sur Tatooine ?

Exercice 3 Particule chargée dans un champ.

1. Un proton de charge e et de masse m arrive avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_0 \overrightarrow{u}_x$ à l'origine O d'un repère orthonormé dans lequel règne un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_z$. Déterminer les équations horaires. Quelle est l'utilité de ce dispositif ?
2. On superpose au champ électrique un champ magnétique tel que le proton a un mouvement rectiligne uniforme. Donner les caractéristiques de $\overrightarrow{B}$. Quelle est l'utilité de ce dispositif ?
3. On remplace maintenant le champ $\overrightarrow{E}$ par un champ $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_y$. Montrer que le champ est circulaire et calculer le rayon. Quelle est l'utilité de ce dispositif ?
4. Quelle est la trajectoire du proton si on superpose les deux champs ?
5. Question de cours : l'effet HALL.

Exercice 4 Piège électrostatique. Un proton est astreint à se déplacer sur un axe (O, x), entouré par trois autres protons fixes en $A\left|\begin{array}{l} a \\ 0 \end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{l} -a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \end{array}\right.$, $CB\left|\begin{array}{l} -a/2 \\ -a\sqrt{3}/2 \end{array}\right.$. Déterminer la période des petites oscillations autour de O.

Exercice 5 Dipôle électrique indéformable. Un bipoint $\{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est tel que M_1 porte une charge $+q$, M_2 une charge $-q$ et la distance $d = M_1M_2$ reste constante sous l'action d'une force intérieure. Il évolue dans le plan vertical (O, x, z) de la figure. Il est placé entre les plaques d'un condensateur où règne un champ électrique horizontal, constant et uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_x$. On repère l'état de ce bipoint par la position de G et l'angle θ d'inclinaison du bipoint par rapport à l'horizontale. On suppose que θ est un petit angle. À la date $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale le bipoint en l'inclinant d'un faible angle θ_0.

1. Énoncer précisément dans ce cas les théorèmes suivants : résultante cinétique, moment cinétique en G dans le référentiel barycentrique et puissance cinétique.
2. Déterminer le mouvement de G.
3. Établir l'expression du moment cinétique en G du bipoint en fonction de m_1, m_2, d et $\dot{\theta}$.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ. Donner la période des petites oscillations.

Exercice 6 Modèle de l'électron élastiquement lié. On assimile l'atome hydrogénoïde à un proton ponctuel et à un électron délocalisé ayant la forme d'un nuage sphérique de rayon R et de densité de charge uniforme ρ. Sous l'action d'un champ électrique uniforme extérieur $\overrightarrow{E}$, le proton se déplace dans le nuage électronique : on note N le centre du nuage et P la position du proton ponctuel. On note x la distance de N à P et on suppose que $x < R$.

1. Donner l'expression de la densité ρ en fonction de e et de R. Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}_p$ créé par le nuage électronique en P.
2. En déduire l'expression de la force électrique subie par le proton et montrer que tout se passe comme si le proton était relié à l'électron par une force de rappel élastique, avec un ressort dont on précisera la longueur à vide ℓ_0 et la constante de raideur k.
3. Calculer numériquement k avec $R = 1\ \mathring{A}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F \cdot \mathrm{m}^{-1}$ et la fréquence des oscillations du système avec $m_{p^+} = 1,627 \cdot 10^{-27}$kg et $m_{e^-} = 9,11 \cdot 10^{-31}$kg.