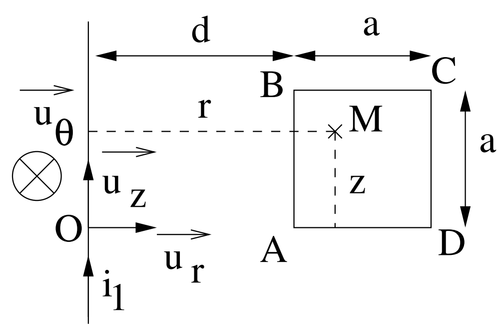
Travaux Dirigés numéro 14

Induction (concours blanc 2007-2008)

PC, 11 décembre 2008

1 Action d'un fil rectiligne infini sur un circuit carré (d'après CCP DEUG 2007)

Sur la figure, l'axe (O, z) porte un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité i_1. $ABCD$ forme un cadre carré fermé, de côté a, de résistance totale R et pour lequel on négligera tout phénomène autoinductif. Le plan du cadre (et celui de la figure) contient (O, z). On définit la base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$. Tout point M de ce plan est donc repéré par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r + z\overrightarrow{u}_z$. En particulier, $\overrightarrow{OA} = d\overrightarrow{u}_r$, $\overrightarrow{OB} = d\overrightarrow{u}_r + a\overrightarrow{u}_z$, $\overrightarrow{OC} = (d+a)\overrightarrow{u}_r + a\overrightarrow{u}_z$ et $\overrightarrow{OD} = (d+a)\overrightarrow{u}_r$.



Préliminaire

On se place dans le cas statique (i_1 est constante). Déterminer l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}_1(M)$ créé par le fil en un point M quelconque du plan du cadre situé à la distance r du fil. La notation prendra tout particulièrement en compte le soin apporté à la rédaction. Dans tout ce problème, on admettra la validité de cette expression, même lorsque i_1 est variable.

1.1 Le cadre est immobile et i_1 est variable

1. Établir l'expression du flux $\Phi_{1,2}$ du champ $\overrightarrow{B}_1(M)$ à travers le cadre orienté dans le sens conventionnel horaire ($A \to B \to C \to D \to A$) en fonction de i_1, d, a et μ_0.
2. En déduire l'expression du coefficient $M_{1,2}$ défini par le rapport entre le flux $\Phi_{1,2}$ du champ créé par le courant i_1 dans le fil à travers le circuit rectangulaire et l'intensité i_1.
3. Peut-on définir de même $M_{2,1}$? Quelle relation lie habituellement $M_{2,1}$ et $M_{1,2}$? Quel est le nom habituellement donné à ces coefficients ? Quelle est leur unité ?
4. Établir l'expression de la force électromotrice d'induction dans le cadre si $i_1(t) = I_0 \frac{t}{\tau}$ où I_0 et τ sont deux constantes positives.
5. En déduire enfin l'expression de l'intensité i_2 du courant circulant dans le cadre dans le sens horaire choisi. Commenter le signe de i_2.
6. On suppose que le cadre est fait avec un matériau assez peu rigide. Le passage du courant induit a-t-il tendance à faire "gonfler" le cadre (jusqu'à devenir circulaire) ou à l'écraser ?

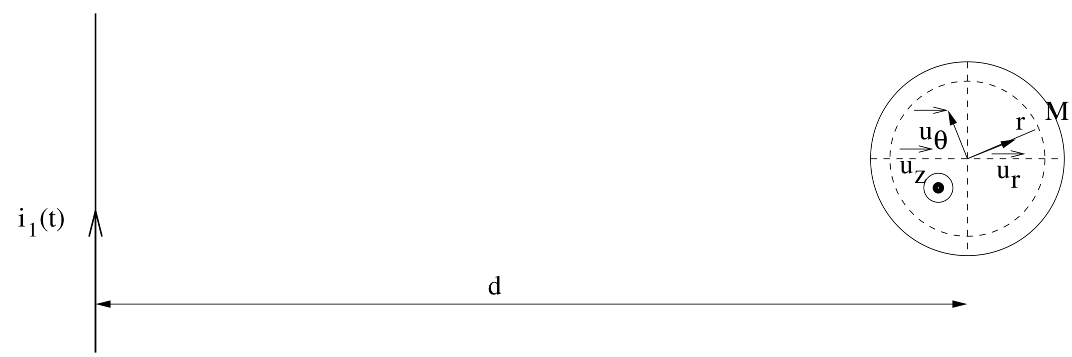
1.2 Le cadre est mobile et i_1 est constant

1. Le cadre est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (O, z) à la vitesse angulaire ω (le cadre et le fil restent coplanaires). Établir l'expression de l'intensité i_2 du courant circulant dans le cadre dans le sens horaire choisi.

2. Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme : il s'éloigne du fil à la vitesse $v > 0$ et $d = v \cdot t + d_0$. Établir l'expression de l'intensité i_2 du courant circulant dans le cadre dans le sens horaire choisi. Calculer dans ce cas la résultante des forces de Laplace sur le cadre et commenter son orientation.

2 Action d'un fil rectiligne sur une plaque métallique

Dans cette deuxième section, on considère une plaque cylindrique conductrice, de conductivité γ, de faible épaisseur h, de rayon a, placée dans un plan contenant un fil rectiligne infini dans lequel circule un courant d'intensité variable : $i_1(t) = I\cos(\omega t)$. On suppose que la distance d entre le centre de la plaque et le fil est très grande devant R, que le champ magnétique créé par le fil sur la plaque cylindrique est uniforme, égal à sa valeur au centre $\overrightarrow{B}_0 = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\overrightarrow{u}_z$, et que le champ magnétique créé par les éventuels courants prenant naissance au sein du cylindre est négligeable devant $\overrightarrow{B}_0$. On définit une nouveau référentiel cylindrique (par rapport à la première partie), de centre O (centre de la plaque), de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_r$, $\overrightarrow{u}_\theta$, $\overrightarrow{u}_z$. La plaque est supposée assez fine pour qu'on puisse considérer qu'un point M de la plaque est repéré par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}r + z\overrightarrow{u}_z$. On rappelle que dans cette base, l'élément de volume s'exprime par $d\tau = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$



1. Comment serait-il possible, en utilisant un solénoïde infiniment long, d'imposer un champ magnétique analogue ? Préciser en particulier sa position géométrique par rapport à la plaque et le sens du courant. Pour la suite et la fin de ce problème, on se ramènera à cette configuration.
2. Quelles sont les propriétés de symétrie et d'invariance de la configuration des charges et des courants dans le solénoïde ?
3. Si on admet que les propriétés d'orientation du champ électrique dans la plaque sont les mêmes que dans le cas électrostatique, en déduire que le champ en M s'écrit $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,t)\overrightarrow{u}_\theta$.
4. Rappeler l'équation dite de Maxwell-Faraday reliant les champs électrique et magnétique indépendamment des courants et charges volumiques. En déduire l'équation intégrale reliant la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long d'un contour fermé $\mathcal{C}$ et le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers une surface fermée orientée tendue sur $\mathcal{C}$.
5. En précisant soigneusement les orientations choisies, en déduire que

$$\overrightarrow{E}(r,t) = -\frac{\mu_0 I\omega r}{4\pi d}\sin(\omega t)\overrightarrow{u}_\theta$$

6. En déduire les expressions de la densité de courant volumique $\overrightarrow{j}$ et de la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} =< \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} >$ au point M.
7. Quelle est la forme des lignes de courant et le nom de ces courants ?
8. Si ω était très grand, certaines hypothèses du calcul précédent deviendraient fausses ; préciser lesquelles et dire sans justification comment les courants se répartiraient dans ce cas.
9. Décrire quelles grandeurs vous utiliseriez et quel type de calcul vous mèneriez pour estimer la durée nécessaire à la fonte complète du disque métallique.