Travaux Dirigés numéro 17

Ondes de gravité, modèles de la houle

PC, 7 janvier 2009

Exercice 1 Modèle de la houle : A - ondes de gravité.

Dans un bassin de largeur ℓ selon (O,y) et de longueur D selon (O,x), la surface libre de l'eau au repos est H. En présence d'une onde plane, elle devient $H+\zeta(x,t)$ avec $\zeta \ll H$ et on admettra que cette hypothèse permet de considérer que $\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\| \gg \|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\|$. L'écoulement est, en bonne approximation, unidirectionnel avec un champ des vitesses du type $v(x,t)\vec{u}_x$. On note P_a la pression atmosphérique. L'eau est supposée incompressible et non visqueuse.

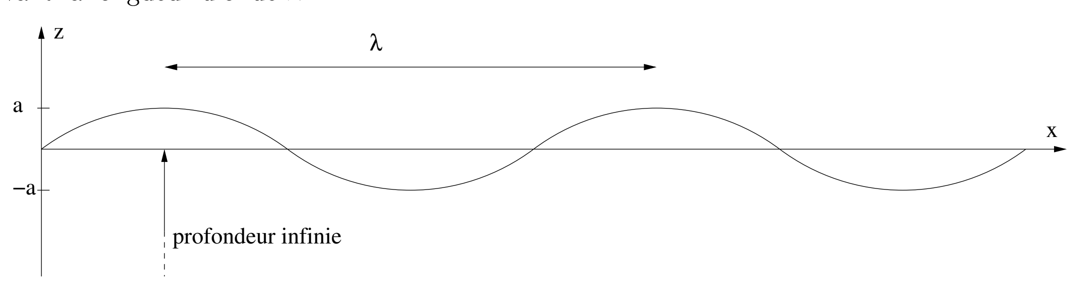
1. Par un bilan de masse entre les abscisses x et $x+dx$, en négligeant les termes du second ordre, établir l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H\frac{\partial v}{\partial x}$$
2. En projetant l'équation d'Euler sur l'axe vertical (O,z), établir l'expression du champ de pressions.
3. En projetant l'équation d'Euler sur l'axe horizontal (O,x), établir l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
4. En déduire l'équation de propagation et la célérité des ondes de gravité.
5. La surface de l'eau dans la piscine forme une membrane vibrante limitée par des bords rigides en $x=0$ et $x=D$.
   (a) Donner les conditions aux limites pour la vitesse.
   (b) Chercher une solution onde stationnaire, en déduire la quantification des fréquences de vibration.
   (c) Interpréter cette relation en dessinant les fuseaux de vibration.
   (d) Calculer la fréquence fondamentale pour un bassin olympique de 50m avec une profondeur $H=2$m.

Exercice 2 Modèle de la houle : B - Houle en eau profonde.

On améliore le modèle précédent en prenant en compte les mouvements des particules de fluide dans les deux directions du plan de la figure : on pose

$$\vec{v} = v_x(x,z,t)\vec{u}_x + v_z(x,z,t)\vec{u}_z \quad \text{et} \quad P(x,y,z,t) = P_e + p(x,z,t)\vec{u}_z$$

où P_e est la pression à l'équilibre du fluide, donnée par la loi de l'hydrostatique. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ et l'eau est assimilée à un fluide non visqueux incompressible de masse volumique μ. On étudie la propagation d'une houle dont l'amplitude a est supposée très petite devant la longueur d'onde λ.



1. Déterminer $P_e(x,z,t)$.
2. Écrire trois équations aux dérivées partielles reliant v_x, v_z et p. On admettra que l'hypothèse $a \ll \lambda$ permet de considérer que $\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\| \gg \|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\|$.
3. En formalisme complexe, on cherche $\underline{p} = p_M(z) \cdot e^{j(kx-\omega t)}$, $\underline{v}_{x,z} = v_{M_{x,z}} \cdot e^{j(kx-\omega t)}$ avec $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Écrire les trois EDP en notation complexe.
4. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par p_M. Résoudre cette équation en profondeur infinie, en notant $p_M(0) = \Pi$.
5. En déduire les expressions de $p(x,z,t)$, $v_x(x,z,t)$ et $v_z(x,z,t)$.
6. Montrer que le champ des vitesses est irrotationnel et dérive d'un champ potentiel Φ dont on donnera l'expression.
7. Pour les petites oscillations, on considère qu'on peut écrire $\begin{cases} v_x(x_0,z_0) = \frac{\partial x}{\partial t} \\ v_z(x_0,z_0) = \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$. Établir les équations horaires d'une particule de fluide de position au repos (x_0,z_0).
8. Qu'est-ce qu'une ancre flottante ?