Travaux Dirigés numéro 17

PC

17.01.2008

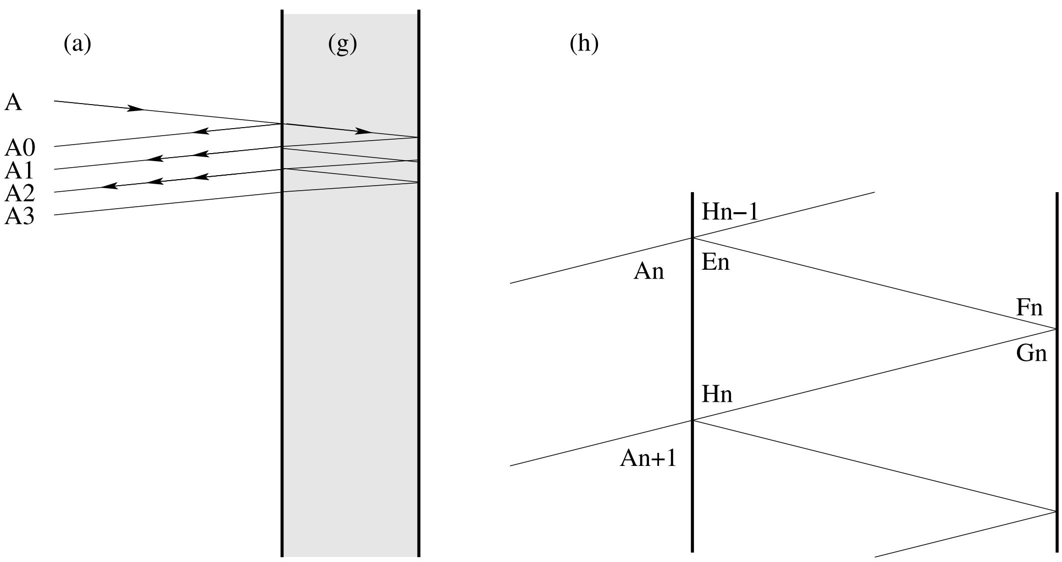
Échographie

Dans l'exercice 4 de la feuille d'exercices 15, on donne l'impédance acoustique de l'air $Z_a = 400\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}$ et celle des tissus du corps humain $Z_h = 1,0 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}$.

<u>Préliminaires</u>

1. Calculer le coefficient de réflexion pour la vitesse au changement de milieu.
2. En conclure qu'il est impossible d'effectuer une échographie dans ces conditions.
3. En formalisme complexe, on note $\underline{P}$ la fonction d'onde de pression en x à la date t. L'onde se propage selon l'axe des x croissants à la célérité c. Montrer que $\underline{P}(x+e,t) = \underline{P} \cdot e^{-jke}$.

On interpose un gel d'impédance acoustique Z_g, de masse volumique $\mu_g \simeq 10^3 \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ et d'épaisseur e entre l'air et la peau.



On cherche à déterminer l'épaisseur e et l'impédance acoustique Z_g permettant de n'avoir aucune réflexion. Pour celà, on va créer des conditions permettant d'observer des interférences destructives entre les différentes ondes réfléchies $\underline{A}_0$, $\underline{A}_1$, $\ldots$, $\underline{A}_n$, $\underline{A}_{n+1}$, $\ldots$ où $\underline{A}_n$ désigne la fonction d'onde complexe (pour la pression par exemple) de la n-ième onde émergente du gel vers l'air. On note (cf. schéma) $\underline{E}_n$ la fonction d'onde juste à droite de l'interface air-gel (après réflexion-transmission), $\underline{F}_n$ la fonction d'onde juste à gauche de l'interface gel-peau (avant réflexion), $\underline{G}_n$ la fonction d'onde juste à gauche de l'interface peau-gel (après réflexion), $\underline{H}_n$ la fonction d'onde juste à droite de l'interface gel-air (avant réflexion-transmission). On note r_{ij} et t_{ij} les coefficients de réflexion à l'interface du milieu (i) et du milieu (j).

1. Montrer que $\underline{A}_0 = r_{ag}\underline{A}$.
2. Établir les relations entre
   (a) $\underline{H}_{n-1}$ et $\underline{A}_n$ (en utilisant t_{ga})
   (b) $\underline{H}_{n-1}$ et $\underline{E}_n$ (en utilisant r_{ga})
   (c) (conséquence des deux premières) $\underline{A}_n$ et $\underline{E}_n$ (en utilisant r_{ga} et t_{ga})
   (d) $\underline{E}_n$ et $\underline{F}_n$ (en utilisant e^{-jke})
   (e) $\underline{F}_n$ et $\underline{G}_n$ (en utilisant r_{gh})
   (f) $\underline{G}_n$ et $\underline{H}_n$ (en utilisant e^{-jke})
   (g) $\underline{H}_n$ et $\underline{A}_{n+1}$ (en utilisant t_{ga}.
3. Déduire de la question précédente que $(\underline{A}_n)$ forme une suite géométrique de premier terme et de raison :
$$\underline{A}_1 = t_{ag}r_{gh}t_{ga}e^{-2jke}\underline{A} \quad \text{et} \quad \underline{q} = r_{gh}r_{ga}e^{-2jke}$$
4. Pour que cette suite soit intégrable, il suffit qu'elle soit de raison réelle strictement inférieure à 1 en valeur absolue. On impose donc $e^{-2jke} = -1$; en déduire la plus petite valeur de e compatible en l'exprimant en fonction de la célérité c_g et de la fréquence f de l'onde ultrasonore.
5. Sous cette hypothèse, la série se calcule aisément (on peut admettre le résultat pour gagner du temps) :
$$\underline{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n = r_{ag}\underline{A} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \underline{q}^{n-1}\right]\underline{A}_1 = \left[r_{ag} - t_{ag}r_{gh}t_{ga}\frac{1}{1-(-r_{gh}r_{ga})}\right]$$
   (a) Montrer que $t_{ag}t_{ga} = 1 + r_{ag}r_{ga}$.
   (b) En déduire que l'onde réfléchie dans l'air est nulle si $r_{ag} = r_{gh}$.
   (c) En déduire que $Z_g = \sqrt{Z_a Z_h}$.
6. Calculer numériquement Z_g.
7. Calculer numériquement e si $f = 5$ MHz.