Travaux Dirigés numéro 21 : Révisions de SUP, mouvements à force centrale

PC

09.02.2008

1 Rappels

- Dans un mouvement à force centrale :
  - le mouvement est plan
  - la normale au plan est le vecteur constant moment cinétique en O $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$ ou le vecteur cinématique $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{L}_O}{m}$.
  - C est la constante de la loi des aires, égale au double de la vitesse aréolaire $C = 2\frac{dS}{dt}$. En coordonnées polaires, $\overrightarrow{C} = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$.
  - L'autre constante du mouvement pour une force centrale conservative $\overrightarrow{f} = f(r)\overrightarrow{u}_r$ dérivant de $Ep(r)$ est l'énergie mécanique $Em = Ec+Ep = \frac{1}{2}mv^2+Ep(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+Ep(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L_O^2}{2mr^2} + Ep(r)\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$.
- Les formules de Binet (NE) permettent de passer des dérivées de r par rapport à t à ses dérivées par rapport à θ :

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \\ \overrightarrow{a} = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{u}_r \end{array} \right.$$

- Par application du TCI :

$$-\frac{\mathcal{G}m_Sm}{r^2}\overrightarrow{u}_r = m\overrightarrow{a} = -mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{u}_r \quad \text{donc} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}m_S}{C^2}$$

- On en déduit, après rotation des axes pour éliminer la constante d'intégration θ_0 et rendre l'autre constante d'intégration A positive : $r = \frac{1}{\frac{\mathcal{G}m_S}{C^2}+A\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}$. $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_S}$ est le **paramètre** et $e = \frac{AC^2}{\mathcal{G}m_S} > 0$ est l'**excentricité** de la conique.
- La position de e permet de déterminer la nature de la conique.

- Dans le cas du mouvement circulaire (nécessairement uniforme), l'écriture du TCI suffit à obtenir la relation fondamentale :

$$-\frac{\mathcal{G}m_Sm}{r^2}\overrightarrow{u}_r = m\overrightarrow{a} = m\frac{v^2}{r} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{\mathcal{G}m_S}{r} \quad \text{et} \quad v = r\omega = \frac{2\pi r}{t}$$

- Dans le cas du mouvement elliptique, on établit (souvent en question de cours) que

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \quad S = \pi ab, \quad ,C = \frac{2S}{T}, \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_S} \quad \text{et} \quad Em = -\frac{\mathcal{G}m_Sm}{2a}$$

Exercice 1 Soit un astre sphérique de rayon R, de masse m_S, en rotation uniforme de période T_S. On note $\mathcal{G}$ la constante de gravitation.

1. Déterminer la vitesse de libération v_L depuis la surface de l'astre.
2. Déterminer la vitesse de satellisation en orbite basse $v_mathrmob$ ($r \simeq R$).
3. Déterminer la vitesse de staellisation en orbite astrostationnaire v_{as}.

Exercice 2 Soit une fusée de masse au décollage M, emportant dans son réservoir une masse m de mélange combustible, consommant D kilogrammes par seconde et partant du sol, dans le champ de pesanteur constant et uniforme g, de vitesse v à la date t, et éjectant le gaz brûlé à la vitesse relative u.

1. Montrer que l'application du TRC sur le système formé de la fusée et son mélange restant à la date t, décomposé en la masse $M+m-D\cdot t-D\cdot dt$ restant à la date $t+dt$ et la masse $D\cdot dt$ qui est éjectée pendant dt donne :

$$-(M+m-D\cdot t)g=\frac{[(M+m-D\cdot t-D\cdot dt)(v+dv)+D\cdot dt(v-u)]-(M+m-D\cdot t)v}{dt}$$

2. On en déduit aisément, en développant et en négligeant les termes du second ordre, l'équation différentielle
$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{Du}{M+m-D\cdot t}$$
Quelle est la condition de décollage ?
3. Vérifier que la solution $v(t)=-gt+u\ln\frac{M+m}{M+m-Dt}$ convient.
4. Quelle est la date t_f de panne sèche ? Quelle est la vitesse atteinte v_f ? À quelle condition la fusée de Tintin quitte-t-elle la Lune ?

Exercice 3 On veut tirer un obus depuis le pôle nord de la lune (masse m_L, rayon R_L) de telle sorte qu'il atterrisse sur le pôle sud. On note v_0 la vitesse et α l'angle que fait le vecteur vitesse avec la verticale au pôle nord (confondue avec l'axe des pôles). Déterminer la relation entre v_0 et $alpha$ et l'intervalle des valeurs possibles pour α.

Exercice 4 Dans le référentiel géocentrique, on veut faire passer un satellite en orbite circulaire de rayon r_1(vitesse v_1) à celle de rayon r_2 (vitesse v_2). Pour celà, en un point M_1 de l'orbite basse, on communique un surcroît de vitesse en le faisant passer de v_1 (tangente au cercle) à v_1' (elle-aussi tangente au cercle). Lorsqu'il arrive sur l'orbite haute en M_2 avec la vitesse v_2' (tangente au cercle), on le fait passer à la vitesse finale v_2.

1. Faire un schéma complet.
2. Déterminer les quatre vitesses v_1, v_1', v_2, v_2' en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, r_1 et r_2.
3. Déterminer la durée du transfert.

Exercice 5 La Terre tourne autour du Soleil en 365 jours et 6 heures en un mouvement qu'on considère comme circulaire, de rayon ST, à la vitesse v_T. La masse du Soleil est $2,0\cdot 10^{30}$kg et on donne $\mathcal{G}=6,67\cdot 10^{-11}\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-2}$. La comète H (comète de Halley) a une période de 76,03 années et sa distance minimale du Soleil est $0,59\cdot ST$. Une comète C est repérée à son périhélie, à la distance $r_C=\frac{ST}{2}$, et à la vitesse $v_C=2v_T$.

1. Calculer numériquement r_T en mètres, en kilomètres et en seconde-lumière.
2. Calculer la distance maximale de la comète de Halley au Soleil. En quelle année atteindra-t-elle ce point ?
3. La comète C reviendra-t-elle ?