Lycée militaire d'Aix en Provence
Année scolaire 2011-2012
5° compagnie
S3
Mercredi 19 octobre 2011

Devoir Programmé n° 2 (1h30)
Géométrie plane

Calculatrice autorisée.
La qualité de la présentation et de la rédaction comptera dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 : ***(4,5 points)***

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;1)$, $B(3;4)$, $C(17;-32)$ et $M(3;-7)$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Chaque réponse devra être justifiée.
Une bonne réponse rapporte 1,5 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ou la non justification d'une rapporte n'apporte ni n'enlève de point.

1. M appartient au cercle de centre A et de rayon 10.
2. Le triangle MAB est isocèle.
3. Le point C appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 2 : ***(6 points)***

Dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère les points $B(3;1)$, $C(-1;-3)$ et $D(2;-2)$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBDC$.
3. Calculer son aire.

Exercice 3 : ***(4 points)***

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
Soient I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Lire les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A;B,D)$.
3. Lire les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(O;I,J)$.

Exercice 4 : ***(5,5 points)***

Dans un repère $(O;I,J)$ orthonormé, on considère les points $M(-3;-1)$, $N(-1;2)$ et $K(2;0)$.

1. Déterminer les coordonnées du point P, symétrique de N par rapport à K.
2. Déterminer la nature du triangle MNP.
3. Déterminer les coordonneés du centre et la longueur du rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

Correction

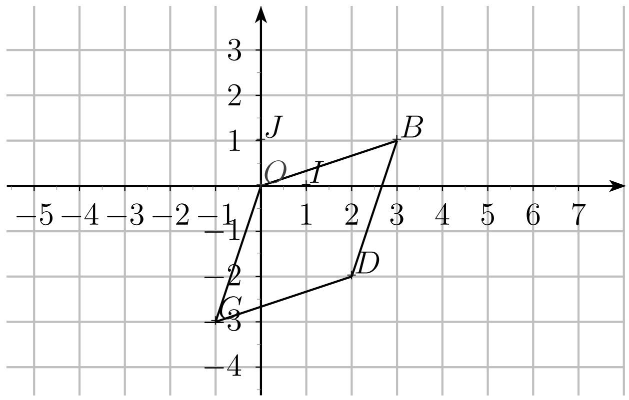
Exercice 1 :

1. $AM = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$
   donc VRAI ... / 1,5

2. $AB = \sqrt{(3-(-3))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45}$ et $MB = \sqrt{(3-3)^2 + (4-(-7))^2} = \sqrt{121} = 11$.
   Les trois côtés ont des longueurs toutes différentes donc FAUX ... / 1,5

3. $AC = \sqrt{(17-(-3))^2 + (-32-1)^2} = \sqrt{1489}$ et $BC = \sqrt{(17-3)^2 + (-32-4)^2} = \sqrt{1492}$.
   C n'est pas à égale distance de A et B donc FAUX ... / 1,5

Exercice 2 :

1. 

   ... / 1

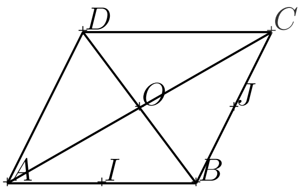
2. Coordonnées du milieu de $[OD]$: $\left(\dfrac{0+2}{2}; \dfrac{0+(-2)}{2}\right)$ soit $(1;-1)$.

   Coordonnées du milieu de $[BC]$: $\left(\dfrac{3+(-1)}{2}; \dfrac{1+(-3)}{2}\right)$ soit $(1;-1)$.

   Les diagonales $[OD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu donc $OBDC$ est un parallélogramme. ... / 1,5
   De plus, $OC = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ et $OB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
   Ainsi, $OBDC$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux, c'est donc un losange. ... /1,5
   Enfin, $OD = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ et $BD = \sqrt{(-1-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32}$ donc $OBDC$ est un losange mais pas un carré. ... / 0,5

3. $\mathcal{A} = \dfrac{OD \times BC}{2} = \dfrac{\sqrt{8} \times \sqrt{32}}{2} = \dfrac{\sqrt{256}}{2} = 8$. ... / 1,5

Exercice 3 :



1. ... / 0,5

2. Dans le repère $(A; B, D)$:
$A(0, 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$, $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ... / 1,5

3. Dans le repère $(O; I, J)$:
$A(1, -2)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(-1; -1)$, $O\,(0; 0)$, $I\,(1; 0)$, $J\,(0; 1)$ ... / 2

Exercice 4 :

1. P est le symétrique de N par rapport à K si et seulement si K est le milieu de $[NP]$ ce qui équivaut à :

$$x_K = \frac{x_N + x_P}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_N + y_P}{2}$$
$$2 = \frac{-1 + x_P}{2} \quad \text{et} \quad 0 = \frac{2 + y_P}{2}$$
$$4 = -1 + x_P \quad \text{et} \quad 0 = 2 + y_P$$
$$x_P = 5 \quad \text{et} \quad y_P = -2$$

P a donc pour coordonnées $(5; -2)$. ... / 1,5

2. $MN = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
$NP = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$
$MP = \sqrt{(5-(-3))^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$ ... / 1,5
On constate que $MP^2 = MN^2 + NP^2$, on en conclut donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que MNP est rectangle en N. ... / 1

3. On sait que dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse (ici $[MP]$) donc les coordonnées du centre du cercle sont :

$$\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{-1+(-2)}{2}\right) \quad \text{soit} \quad (1; -1,5)$$

... / 1
Alors, le rayon du cercle a une longueur égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse soit,
$\mathcal{R} = \frac{MP}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ ... / 0,5