Activité : Valeur approchée d'une solution

Dans le cas d'une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet de savoir si une équation a des solutions et même d'en déterminer le nombre (lorsqu'on peut étudier les variations de la fonction). On ne peut, toutefois, pas toujours résoudre algébriquement une telle équation. Voici quelques méthodes permettant de déterminer une valeur approchée d'une solution.

Méthode par dichotomie :

Principe : Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$ et k un réel compris netre $f(a)$ et $f(b)$. On sait alors qu'il existe un unique réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = k$. Alors,

- On calcule $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$ puis $f(c_1)$.
- Si k est compris entre $f(a)$ et $f(c_1)$ alors on pose $c_2 = \dfrac{a+c_1}{2}$,
- Sinon, on pose $c_2 = \dfrac{c_1+b}{2}$.
- On détermine ensuite entre quelles valeurs (parmi $f(a), f(c_1), f(c_2) et f(b)$) k est compris puis on calcule c_3 la valeur centrale de l'intervalle ainsi trouvé et on réitère les caluls.

Exemple : Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 1.$$

1. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2;-1]$.
   On notera α cette solution.
2. Calculer $f(-1,5)$. En déduire un encadrement, d'amplitude 0,5, de α.
3. Réitérer les calculs jusqu'à obtenir un encadrement de α d'amplitude 0,0625.

Méthode par balayage :

Principe : Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$ et k un réel compris netre $f(a)$ et $f(b)$. On sait alors qu'il existe un unique réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = k$. Alors,

1. On divise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude $[a;c_1], [c_1;c_2], \cdots, [c_{n-1}, b]$,
2. On calcule $f(c_1), f(c_2), \cdots, f(c_{n-1})$ puis on détermine entre quelles valeurs est compris k.
3. On divise alors l'intervalle ainsi trouvé en n intervalles de même amplitude et on réitère les opérations précédentes.

L'usage de la fonction tableur de la calculatrice est un outil très efficace pour appliquer cette méthode.

Exemple : Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 1.$$

Déterminer un encadrement d'amplitude 0,001 de la solution α, comprise dans l'intervalle $[-2;-1]$, de l'équation $f(x) = 0$.

Exercices :

1. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,02 de la solution de l'équation $\sqrt{x} = 5$.
2. Résoudre, sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, $2\cos x = \frac{1}{2}$ avec une précision de 0,01.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5 = 0$ (on pourra, dans un premier temps, étudier les variations de la fonction $x \longmapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5$).