Activité : Equation $f' = f$

Le but de cette activité est d'étudier différentes propriétés des fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
La question de l'existence de telles fonctions est admise pour le moment. Dans la suite de l'activité, f désignera donc une solution de cette équation.

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = f(x) \times f(-x)$.

   a) Etudier la dérivabilité de F.

   b) Calculer la dérivée de F.

   c) Que peut-on en déduire pour F ? Justifier qu'alors $f(x) \neq 0$ pour tout x réel.

2. **Unicité :**
   On considère que g est une autre fonction solution de l'équation et on définit alors la fonction h sur $\mathbb{R}$ par : $h = \dfrac{g}{f}$.

   a) Etudier la dérivabilité de h.

   b) Calculer la dérivée de h.

   c) Que peut-on en déduire pour h ? Justifier qu'alors $g = f$.

3. Soit y un réel fixé. On définit alors, pour tout réel x, la fonction ψ par : $\psi(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$.

   a) Etudier la dérivabilité de ψ.

   b) Calculer la dérivée de ψ.

   c) Que peut-on en déduire pour ψ ? Justifier alors que : $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous les réels x et y.

4. **Signe :**

   a) Justifier que pour tout réel x, $f(x) = (f(\dfrac{x}{2}))^2$.

   b) En déduire que $f(x) > 0$ pour tout réel x.