

La fonction exponentielle

1 Equation $f' = f$:

1.1 Théorème :

Il existe une unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1.2 Définition :

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(x) = f(x).$$

On note cette fonction \exp .

1.3 Propriétés :

- Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$.
- Pour tous les réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
- Pour tout réel x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- Pour tous les réels x et y , $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Preuve :

Les deux premières ont été prouvées en activité.

Pour tout réel x , on a :

$$\exp(x + (-x)) = \exp(x) \times \exp(-x) = \exp(0) = 1$$

et comme on sait que $\exp(x) > 0$, on obtient :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Il en résulte que pour tous réels x et y :

$$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

1.4 Notation :

De part la dernière propriété, on peut écrire l'exponentielle comme une puissance : $\exp(x) = e^x$.

Conséquences :

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive et qu'elle est égale à sa dérivée, on en déduit qu'elle est strictement croissante.

1.5 Propriétés :

Soient a et b deux réels. Alors :

- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.
- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$.

Preuve :

Il est évident que si $a = b$ alors $e^a = e^b$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, on a facilement que pour tout $a < b$, $e^a < e^b$.

Quant aux réciproques, elles découlent également de la stricte croissance de la fonction :

Si $e^a < e^b$, $a \neq b$ et on ne peut pas avoir $a > b$ car alors $e^a > e^b$ puisque l'exponentielle est une fonction strictement croissante.

1.6 Propriété :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+.$$

Preuve :

On va prouver que pour tout réel $x > 0$, $e^x > x$:

Pour cela, on définit la fonction $f(x) = e^x - x$ qui est dérivable sur \mathbb{R} et telle que : $f'(x) = e^x - 1$.

Comme $e^0 = 1$ et que la fonction exponentielle est croissante, on sait que pour tout $x > 0$, $e^x > 1$ et donc : $f'(x) > 0$.

La fonction f est alors croissante sur $[0; +\infty[$ et comme $f(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x > 0$, $f(x) > 1 > 0$ donc : $e^x > x$.

Par le théorème de comparaison des limites, on conclut alors que si x tend vers $+\infty$, e^x tend aussi vers $+\infty$.

Comme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on conclut quant à la limite en $-\infty$.

1.7 Propriétés :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0$

Preuve :

1. *Puisque l'exponentielle est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , elle est continue sur \mathbb{R} et :*

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0.$$

Par quotient avec x on obtient alors une forme indéterminée. Mais,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0},$$

il s'agit donc du taux d'accroissement en 0 et la limite lorsque x tend vers 0 est donc le nombre dérivé de l'exponentielle en 0, soit 1.

2. Voir exercice 1 de la feuille.

1.8 Représentation graphique :

