

Fonctions logarithmes : exercices type bac.

Exercice 1 :

On désigne par \ln la fonction logarithme népérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] - 2; 2[$ par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right).$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] - 2; 2[$, on a :

$$f'(x) = \frac{4}{4-x^2}.$$

- (b) En déduire les variations de f sur l'intervalle $] - 2; 2[$.

Exercice 2 :

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$).
- $\ln(1) = 0$.

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x :

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\ln \left(\frac{1}{b} \right) = -\ln(b) \text{ et } \ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln(a) - \ln(b)$$

pour tous réels strictement positifs a et b .

3. On donne $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$.
En déduire des encadrements de $\ln 6$, $\ln \left(\frac{1}{6} \right)$ et $\ln \left(\frac{3}{8} \right)$.

Exercice 3 :

On définit la fonction u sur \mathbb{R}^* par $u(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln |x|$.

1. Etudier les variations de u sur \mathbb{R}^* . Préciser la valeur de l'extremum relatif de u .
2. Etudier les limites de u en 0 et en $+\infty$.
3. On considère l'équation $u(x) = 0$.

(a) Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur $[\frac{1}{2}; 1]$ et en déduire qu'elle est la seule sur \mathbb{R}^* ; cette solution sera notée α .

(b) Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$, avec n entier.

4. En déduire le signe de $u(x)$ sur \mathbb{R}^* .

Exercice 4 :

Soient f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note \mathcal{C} et \mathcal{C}' les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

1. (a) Etudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0; +\infty[$.
 (b) En déduire la position relative des deux courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sur $]0; +\infty[$.
2. Pour x appartenant à $]0; +\infty[$, M est le point de \mathcal{C} d'abscisse x et N est le point de \mathcal{C}' de même abscisse.
 - (a) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
 Etudier les variations de la fonction h sur $]0; +\infty[$.
 - (b) En déduire que sur l'intervalle $[1; e]$, la valeur maximale de la distance est obtenue pour $x = \sqrt{e}$.
 - (c) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.
 - (d) En déduire que, sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$, il existe deux réels a et b pour lesquels la distance MN est égale à 1.

Exercice 5 :

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

- (a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variation de f_n .
- (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution de $]0; +\infty[$.
 On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1; e]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
 - (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n; 0)$.
 - (b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .
 - (c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n .
 - (d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) .
3. (a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n .
 (b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et α_n puis vérifier que :

$$f - n + 1(\alpha_n) < 0.$$

- (c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .
- (d) Montrer que la suite (α_n) converge.
 On note l sa limite. Etablir que :
 $\ln l = 1$ et en déduire la valeur de l .